Kumpulan Soal & Pembahasan: Peubah Acak Kontinu

Latihan Terstruktur: Fungsi Padat Peluang (PDF), CDF, Distribusi Uniform, Eksponensial, dan Distribusi Normal Baku (Z-Score)

Statistika dan Probabilitas · Pertemuan 06

Peta Topik Latihan Soal & Pembahasan

Bagian A: Konsep Dasar PDF, CDF, Ekspektasi

- **Soal 1:** Menentukan Konstanta Normalisasi k pada PDF Kuadratik
- **Soal 2:** PDF Segitiga (**Piecewise**), Peluang, dan Median
- **Soal 3:** Konstruksi CDF $F(x)$ dan Evaluasi Cepat Peluang
- **Soal 4:** Perhitungan Nilai Harapan $E(X)$ dan Varians $\mathrm{Var}(X)$

Bagian B: Distribusi Uniform (Seragam)

- **Soal 5:** Waktu Tunggu Layanan Bus Kota $U(0, 20)$
- **Soal 6:** Galat Pembulatan (**Round-off Error**) Sensor Simetris

Bagian C: Distribusi Eksponensial

- **Soal 7:** Waktu Antar-Kedatangan Nasabah di ATM & Ekor Kanan
- **Soal 8:** Sifat Tanpa Ingatan (**Memoryless Property**) Komponen
- **Soal 9:** Waktu Respons API Microservice & Penentuan Persentil

Bagian D: Distribusi Normal & Standarisasi Z

- **Soal 10:** Ujian Masuk & Peluang Melebihi Skor Tertentu
- **Soal 11:** Kontrol Kualitas Kemasan di Antara Dua Batas
- **Soal 12:** Inversi Normal (**Percentile Top 10%**) untuk Insentif
- **Soal 13:** Aturan Empiris $68 - 95 - 99,7$ pada Daya Tahan Baterai
- **Soal 14:** Deteksi Anomali Dua Sisi pada Transmisi IoT

Bagian A — Konsep Dasar PDF & CDF

Syarat keabsahan fungsi peluang, akumulasi luas, serta ekspektasi & varians kontinu

Soal 1: Menentukan Konstanta Normalisasi PDF Kuadratik

KASUS

Sebuah peubah acak kontinu X memiliki fungsi padat peluang (**Probability Density Function**) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{untuk } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pertanyaan

1. Tentukan nilai konstanta k agar $f(x)$ merupakan PDF yang sah!
2. Hitung nilai probabilitas $P(1 \leq X \leq 2)$!
3. Apakah nilai $P(X = 2)$ memiliki probabilitas lebih besar dari nol? Jelaskan alasannya!

Pembahasan 1: Konstanta Normalisasi & Peluang Interval

1. Syarat Keabsahan PDF: Total luas di bawah kurva harus sama dengan 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Longrightarrow \int_{0}^{3} kx^2\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Longrightarrow k\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1 \Longrightarrow 9k = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{k = \frac{1}{9}}$$

2. Menghitung $P(1 \le X \le 2)$:

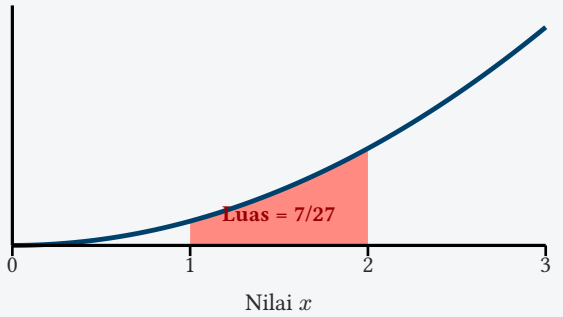
$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{27}x^3\right]_1^2 = \frac{2^3 - 1^3}{27} = \boldsymbol{\frac{7}{27} \approx 0,2593\ (25{,}93\%)}$$

3. Nilai $P(X = 2)$: Pada peubah acak kontinu, peluang tepat di satu titik **selalu 0**:

$$P(X = 2) = \int_2^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Karena suatu titik tidak memiliki ketebalan/interval (lebar = 0).

Visualisasi Kurva & Luas Area



Daerah merah merepresentasikan peluang $P(1 \le X \le 2)$ sebagai luasan integral.

Soal 2: PDF Segitiga (Piecewise) dan Nilai Median

KASUS

Waktu respons (**delay**) suatu sistem komputasi terdistribusi dalam milidetik dimodelkan oleh peubah acak kontinu X dengan fungsi padat peluang segitiga menurun:

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & \text{untuk } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pertanyaan

1. Tentukan nilai konstanta k secara geometris dan secara integral!
2. Hitung probabilitas bahwa **delay** sistem melebihi 1 milidetik, yaitu $P(X > 1)$!
3. Tentukan nilai median m, yaitu nilai yang membagi probabilitas tepat menjadi dua: $P(X \le m) = 0,5$!

Pembahasan 2: PDF Segitiga dan Perhitungan Median

1. Nilai k:

- **Geometris:** Bentuk kurva adalah segitiga siku-siku dengan alas $= 2$ dan tinggi $= f(0) = 2k$. Luas $= \frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi $= \frac{1}{2} \times 2 \times (2k) = 2k = 1 \Longrightarrow \mathbf{k = 1}$
- Maka fungsi kepadatan adalah $f(x) = 2 - x$ untuk $0 \le x \le 2$.

2. Menghitung $P(X > 1)$:

$$P(X > 1) = \int_1^2 (2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2 - 1{,}5 = \mathbf{0{,}50\ (50\%)}$$

3. Menentukan Nilai Median m: Median memenuhi $\int_0^m (2 - x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$:

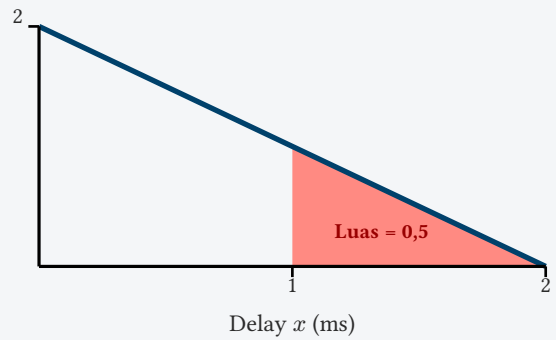
$$\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^m = 0{,}5 \Longrightarrow 2m - \frac{m^2}{2} = 0{,}5 \Longrightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$$

Gunakan rumus kuadrat abc:

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Karena rentang $0 \le m \le 2$, kita ambil $m = 2 - \sqrt{3} \approx \mathbf{0{,}5858}$ **"ms"**.

Ilustrasi Geometri Segitiga



Luas segitiga merah di atas $x = 1$ adalah $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0{,}5$.

Soal 3: Konstruksi CDF $F(x)$ dan Evaluasi Probabilitas Cepat

KASUS

Diberikan fungsi padat peluang (**PDF**) dari daya tahan suatu komponen mikroprosesor (dalam ribuan jam) berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{untuk } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pertanyaan

1. Tentukan formula Fungsi Distribusi Kumulatif / **Cumulative Distribution Function** $F(x)$ untuk seluruh nilai $x \in (-\infty, \infty)$!
2. Dengan menggunakan $F(x)$, hitung probabilitas bahwa komponen rusak sebelum 1.000 jam ($x \leq 1$)!
3. Hitung peluang komponen bertahan antara 1.000 hingga 1.500 jam ($P(1 < X \leq 1,5)$) langsung dari fungsi $F(x)$ tanpa menghitung integral ulang!

Pembahasan 3: Konstruksi dan Pemanfaatan CDF

Solusi Langkah demi Langkah

1. Menentukan CDF $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$:

- Untuk $x < 0$: $F(x) = 0$.
- Untuk $0 \le x \le 2$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{8}t^2\,dt = \left[\frac{3}{8}\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{8}$$

- Untuk $x > 2$: Seluruh probabilitas telah terakumulasi penuh, sehingga $F(x) = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{untuk } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$$

2. Evaluasi $P(X \le 1)$:

$$P(X \le 1) = F(1) = \frac{1^3}{8} = \mathbf{1/8 = 0{,}125\ (12{,}5\%)}$$

3. Evaluasi $P(1 < X \le 1{,}5)$: Menggunakan teorema fundamental hubungan CDF: $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$:

$$P(1 < X \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1) = \frac{(1{,}5)^3}{8} - \frac{1^3}{8} = \frac{3.375 - 1}{8} = \frac{2.375}{8} = \mathbf{0{,}2969\ (29{,}69\%)}$$

Soal 4: Menghitung Ekspektasi $E(X)$ dan Varians $\mathrm{Var}(X)$

KASUS

Peubah acak kontinu X menyatakan panjang kabel fiber optik yang cacat (dalam meter per gulungan) dengan PDF:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pertanyaan

1. Tentukan Nilai Harapan (**Expected Value**) $E(X)$ atau rata-rata panjang kabel cacat!
2. Hitung momen kedua $E(X^2)$!
3. Tentukan nilai Varians $\mathrm{Var}(X)$ dan Simpangan Baku σ dari panjang kabel cacat!

Pembahasan 4: Ekspektasi, Momen Kedua, dan Varians

Solusi Langkah demi Langkah

1. Nilai Harapan $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \mathbf{1/3 \text{ approx } 0{,}333 \text{ “meter“}}$$

2. Momen Kedua $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{12}\right) = \mathbf{1/6 \text{ approx } 0{,}1667}$$

3. Varians $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \mathbf{1/18 \text{ approx } 0{,}0556 \text{ “meter“\^{}2}}$$

4. Simpangan Baku $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx \mathbf{0{,}2357 \text{ “meter“}}$$

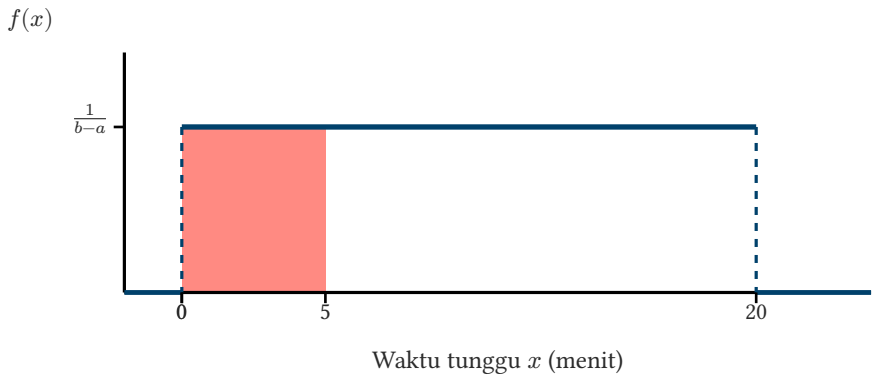
Bagian B — Distribusi Uniform (Seragam)

Model probabilitas kejadian merata konstan pada interval $[a, b]$

Soal 5: Waktu Tunggu Layanan Bus Kota $U(0, 20)$

KASUS

Bus Trans-Kampus tiba di halte setiap 20 menit sekali. Seorang mahasiswa tiba di halte pada waktu yang acak, sehingga waktu tunggunya X (dalam menit) berdistribusi seragam kontinu pada selang 0 hingga 20 menit ($X \sim U(0, 20)$).



Pertanyaan

1. Tuliskan fungsi kepadatan peluang $f(x)$!
2. Hitung probabilitas mahasiswa menunggu tidak lebih dari 5 menit ($P(X \leq 5)$)!
3. Hitung peluang waktu tunggu antara 8 dan 15 menit ($P(8 \leq X \leq 15)$)!
4. Tentukan nilai rata-rata dan simpangan bakunya!

Pembahasan 5: Analisis Waktu Tunggu Uniform

1. Fungsi Kepadatan Peluang $f(x)$: Untuk $U(a, b)$ dengan $a = 0$ dan $b = 20$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{20-0} = \mathbf{1/20 = 0{,}05} \quad (0 \le x \le 20)$$

2. Peluang $P(X \le 5)$: Karena bentuknya persegi panjang, peluang adalah luas = panjang × tinggi:

$$P(X \le 5) = (5-0) \times 0{,}05 = \mathbf{0{,}25\ (25\%)}$$

3. Peluang $P(8 \le X \le 15)$:

$$P(8 \le X \le 15) = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20} = \mathbf{0{,}35\ (35\%)}$$

4. Rata-rata dan Simpangan Baku:

- Mean: $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+20}{2} = \mathbf{10}$ **"menit"**
- Varians: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{20^2}{12} = \frac{400}{12} = 33{,}33$
- Simpangan Baku: $\sigma = \sqrt{33.33} = \frac{20}{\sqrt{12}} \approx \mathbf{5{,}77}$ **"menit"**

Intuisi Geometris

Pada distribusi Uniform, kita tidak perlu repot melakukan integral rumit:

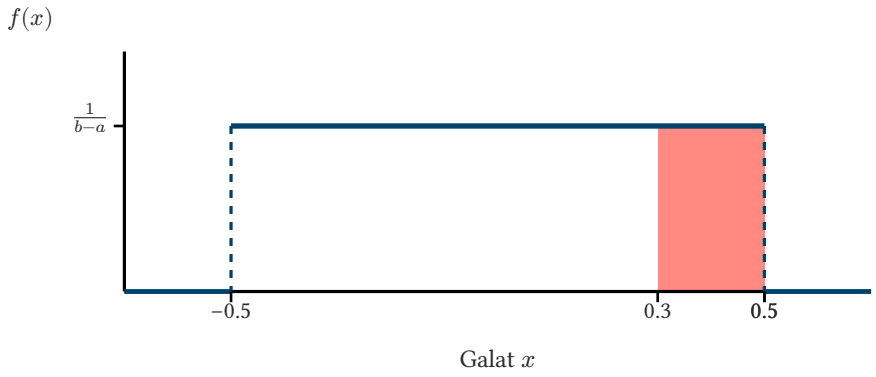
$$P(c \le X \le d) = \tfrac{d-c}{b-a}$$

Probabilitas semata-mata adalah **rasio panjang interval minat** terhadap **total panjang interval semesta**.

Soal 6: Galat Pembulatan (Round-off Error) Floating-Point

KASUS

Dalam komputasi numerik, galat pembulatan bilangan pecahan (**round-off error**) ke bilangan bulat terdekat sering dimodelkan sebagai peubah acak kontinu seragam $X \sim U(-0,5; 0,5)$.



Pertanyaan

1. Tuliskan formula PDF dan CDF dari galat ini!
2. Hitung probabilitas bahwa besarnya galat secara absolut melebihi $0,3$, yaitu $P(|X| > 0,3)$!
3. Berapakah nilai rata-rata dari galat pembulatan ini?

Pembahasan 6: Galat Pembulatan Dua Sisi

Solusi Langkah demi Langkah

1. Formula PDF dan CDF:

- Panjang interval: $b - a = 0,5 - (-0,5) = 1,0$.
- Maka $f(x) = \frac{1}{1,0} = \mathbf{1}$ untuk $-0,5 \leq x \leq 0,5$.
- CDF untuk $-0,5 \leq x \leq 0,5$:

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} = \frac{x - (-0.5)}{1} = \mathbf{x + 0,5}$$

2. Menghitung $P(|X| > 0,3)$: Ketidaksamaan mutlak $|X| > 0,3$ berarti galat bernilai sangat positif ($X > 0,3$) ATAU sangat negatif ($X < -0,3$):

$$P(|X| > 0,3) = P(X < -0,3) + P(X > 0,3)$$

- Ekor kiri: $P(X < -0,3) = (-0,3 - (-0,5)) \times 1 = 0,2$
- Ekor kanan: $P(X > 0,3) = (0,5 - 0,3) \times 1 = 0,2$
- Total peluang: $P(|X| > 0,3) = 0,2 + 0,2 = \mathbf{0,40\ (40\%)}$.

3. Rata-rata Galat:

$$\mu = \frac{a + b}{2} = \frac{-0.5 + 0.5}{2} = \mathbf{0}$$

Karena simetris terhadap nol, galat rata-rata jangka panjang saling meniadakan (**unbiased**).

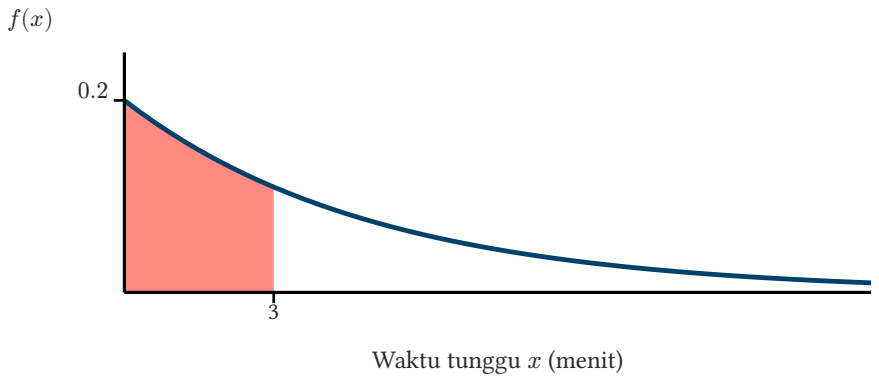
Bagian C — Distribusi Eksponensial

Memodelkan waktu antar-kejadian dan sifat unik tanpa ingatan (**memoryless**)

Soal 7: Waktu Antar-Kedatangan Nasabah di Mesin ATM

KASUS

Waktu antar-kedatangan nasabah di bilik ATM sebuah bank mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata waktu tunggu 5 menit ($\beta = \frac{1}{\lambda} = 5$ menit, sehingga laju kedatangan $\lambda = 0,2$ nasabah per menit).



Pertanyaan

1. Berapakah peluang nasabah berikutnya datang dalam waktu **kurang dari 3 menit** ($P(X \leq 3)$)?
2. Berapakah peluang nasabah berikutnya baru datang **setelah lebih dari 8 menit** ($P(X > 8)$)?
3. Tentukan simpangan baku dari waktu tunggu tersebut!

Pembahasan 7: Kalkulasi Eksponensial & Ekor Kanan

Parameter: $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$ kedatangan/menit. Rumus CDF Eksponensial: $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Rumus Keandalan / Ekor Kanan: $P(X > x) = e^{-\lambda x}$.

1. Peluang Kurang dari 3 Menit ($P(X \leq 3)$):

$$P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-0,2 \times 3} = 1 - e^{-0,6}$$

Karena $e^{-0,6} \approx 0,5488$:

$$P(X \leq 3) = 1 - 0,5488 = \mathbf{0,4512\ (45,12\%)}$$

2. Peluang Lebih dari 8 Menit ($P(X > 8)$):

$$P(X > 8) = e^{-0,2 \times 8} = e^{-1,6} \approx \mathbf{0,2019\ (20,19\%)}$$

3. Simpangan Baku Waktu Tunggu: Pada distribusi eksponensial, keunikan utamanya adalah simpangan baku selalu persis sama dengan rata-ratanya:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{5\ \text{“menit“}}$$

Kiat Praktis Eksponensial:

Untuk menghitung peluang $P(X > t)$ (peluang bertahan lebih lama dari t), gunakan jalan pintas langsung:

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

Tanpa perlu menghitung $1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$.

Soal 8: Sifat Tanpa Ingatan (Memoryless Property) Komponen Server

KASUS

Masa pakai (**lifetime**) sebuah hard disk server berdistribusi eksponensial dengan rata-rata umur operasional 10.000 jam ($\lambda = 0,0001$ per jam). Saat ini, server tersebut telah beroperasi tanpa henti selama 6.000 jam tanpa mengalami kerusakan sama sekali.

Pertanyaan

1. Berapakah peluang hard disk tersebut akan mampu bertahan **setidaknya 4.000 jam tambahan lagi**?
2. Bandingkan hasil tersebut dengan peluang sebuah hard disk baru yang baru keluar dari kardus mampu bertahan selama 4.000 jam!
3. Jelaskan mengapa fenomena ini disebut **Memoryless Property** dan kapan asumsi ini realistis dalam bidang rekayasa!

Pembahasan 8: Pembuktian Sifat Tanpa Ingatan

Solusi Langkah demi Langkah

1. Peluang Bersyarat Hard Disk Bekas ($P(X > 10.000 \mid X > 6.000)$):

$$P(X > 6.000 + 4.000 \mid X > 6.000) = \frac{P(X > 10.000)}{P(X > 6.000)} = \frac{e^{-\lambda(10.000)}}{e^{-\lambda(6.000)}} = e^{-\lambda(10.000-6.000)} = e^{-\lambda(4.000)}$$

Dengan $\lambda = 0,0001$:

$$P = e^{-0,0001 \times 4.000} = e^{-0,4} \approx \mathbf{0,6703\ (67,03\%)}$$

2. Peluang Komponen Baru Bertahan 4.000 Jam:

$$P(X > 4.000) = e^{-0,0001 \times 4.000} = e^{-0,4} \approx \mathbf{0,6703\ (67,03\%)}$$

Hasilnya **persis sama**!

3. Makna Memoryless Property: Distribusi eksponensial **tidak mengingat** berapa lama komponen telah bekerja: $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$. Komponen tidak mengalami efek aus (**wear-out**) mekanis; kegagalan murni diakibatkan oleh kejadian eksternal acak seketika (seperti lonjakan voltase listrik mendadak).

Soal 9: Waktu Respons API Microservice & Penentuan Persentil

KASUS

Waktu respons suatu endpoint API microservice (dalam milidetik) berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 200 ms ($\lambda = \frac{1}{200} = 0,005$ per ms). Tim DevOps menetapkan **Service Level Agreement (SLA)** bahwa sebagian besar request harus selesai sebelum ambang batas waktu tertentu.

Pertanyaan

1. Berapa probabilitas suatu request mengalami **timeout** jika sistem memutus koneksi pada batas 500 ms ($P(X > 500)$)?
2. Tentukan persentil ke-90 ($P_{\{90\}}$) dari waktu respons API tersebut, yaitu ambang waktu T sehingga 90% permintaan selesai di bawah waktu T!

Pembahasan 9: Peluang Timeout & Inversi Persentil Eksponensial

Solusi Langkah demi Langkah

1. Menghitung Peluang Timeout ($X > 500$ ms): Gunakan ekor kanan fungsi eksponensial:

$$P(X > 500) = e^{-\lambda \times 500} = e^{-0{,}005 \times 500} = e^{-2{,}5}$$

Karena $e^{-2{,}5} \approx 0{,}0821$:

$$P(X > 500) \approx 0{,}0821 \textbf{ atau sekitar 8,21\% request mengalami timeout.}$$

2. Menghitung Persentil ke-90 ($P_{\{90\}}$): Kita mencari nilai T sedemikian rupa sehingga:

$$F(T) = P(X \leq T) = 0{,}90$$

$$1 - e^{-\lambda T} = 0{,}90 \Longrightarrow e^{-\lambda T} = 0{,}10$$

Terapkan logaritma natural (ln) pada kedua ruas:

$$-\lambda T = \ln(0{,}10) \Longrightarrow -0{,}005T = -2{,}3026$$

$$T = \frac{2.3026}{0.005} = 2.3026 \times 200 = \textbf{460,52 “ms“}$$

Kesimpulan Manajerial: 90% dari seluruh panggilan API akan selesai dalam waktu kurang dari $460{,}5$ ms.

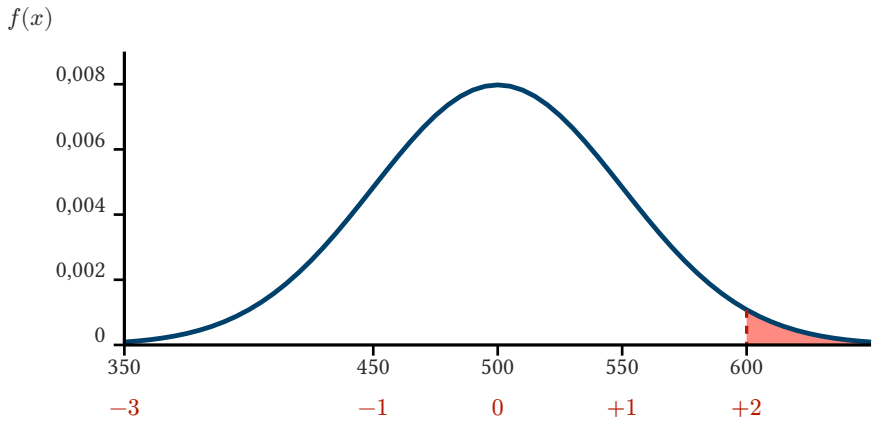
Bagian D — Distribusi Normal & Z-Score

Standarisasi kurva lonceng Gaussian dan pembacaan tabel normal baku

Soal 10: Ujian Masuk & Peluang Melebihi Skor Tertentu

KASUS

Nilai ujian seleksi masuk universitas untuk 10.000 peserta berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 500$ dan simpangan baku $\sigma = 50$.



Nilai X (atas) dan Skor Z (bawah)

Pertanyaan

1. Hitung skor Z bagi peserta yang memperoleh nilai 600!
2. Berapakah peluang seorang peserta acak mendapatkan nilai di atas 600 ($P(X > 600)$)? (Gunakan tabel: $\Phi(2,00) = 0,9772$).
3. Dari 10.000 peserta, berapa estimasi jumlah peserta yang nilainya melebihi 600?

Pembahasan 10: Standarisasi Skor dan Ekor Kanan Normal

1. Standarisasi Nilai ke Z-Score:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{600 - 500}{50} = \frac{100}{50} = \mathbf{+2{,}00}$$

Nilai 600 berada tepat 2 simpangan baku di atas rata-rata populasi.

2. Menghitung Peluang $P(X > 600)$: Tabel Normal Kumulatif $\Phi(z)$ selalu mengukur luas daerah sebelah kiri. Maka untuk luas ekor kanan (melebihi 600):

$$P(X > 600) = P(Z > 2{,}00) = 1 - \Phi(2{,}00)$$

$$P(Z > 2{,}00) = 1 - 0{,}9772 = \mathbf{0{,}0228\ (2{,}28\%)}$$

3. Estimasi Jumlah Peserta Lolos:

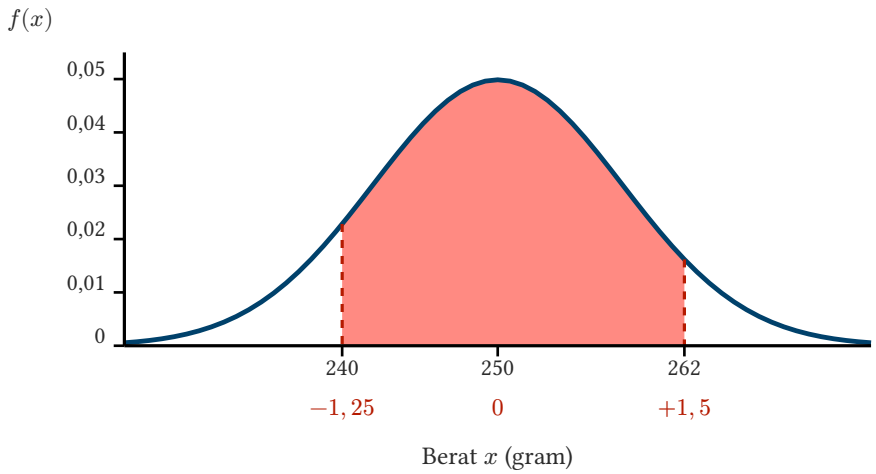
$$\text{Jumlah Siswa} = N \times P(X > 600) = 10.000 \times 0{,}0228 = \mathbf{228\ \text{“peserta“}}$$

Pemeriksaan Cepat (Aturan Empiris):
Berdasarkan aturan empiris, sekitar 95% data berada dalam selang $\mu \pm 2\sigma$. Sisa data di luar selang adalah 5%, terbagi rata di ekor kiri $(2,5\%)$ dan ekor kanan $(2,5\%)$. Hasil hitungan kita $(2,28\%)$ sangat konsisten dengan estimasi kasar empiris $2,5\%$.

Soal 11: Kontrol Kualitas Kemasan di Antara Dua Batas

KASUS

Sebuah mesin pengisi otomatis mengemas makanan ringan dengan berat bersih berdistribusi normal: rata-rata $\mu = 250$ gram dan simpangan baku $\sigma = 8$ gram. Produk dinyatakan memenuhi standar jika beratnya berada dalam rentang 240 gram hingga 262 gram.



Pertanyaan

1. Hitung nilai Z untuk batas bawah (240 g) dan batas atas (262 g)!
2. Tentukan persentase produk kemasan yang memenuhi standar kualitas tersebut!

(Nilai tabel: $\Phi(1,50) = 0,9332$ dan $\Phi(1,25) = 0,8944$).

Pembahasan 11: Peluang di Antara Dua Batas Normal

Solusi Langkah demi Langkah

1. Transformasi Z-Score Masing-Masing Batas:

- Batas bawah ($x_1 = 240$):

$$z_1 = \frac{240 - 250}{8} = \frac{-10}{8} = \mathbf{-1{,}25}$$

- Batas atas ($x_2 = 262$):

$$z_2 = \frac{262 - 250}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{+1{,}50}$$

2. Menghitung Peluang Interval $P(240 \leq X \leq 262)$:

$$P(240 \leq X \leq 262) = P(-1{,}25 \leq Z \leq 1{,}50) = \Phi(1{,}50) - \Phi(-1{,}25)$$

Karena kurva normal simetris sempurna di sekitar 0:

$$\Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

Maka selisih luas area adalah:

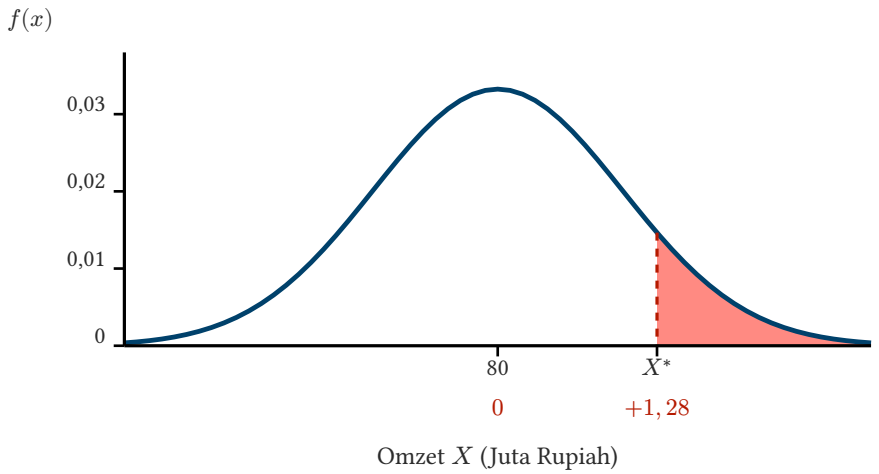
$$P(-1{,}25 \leq Z \leq 1{,}50) = 0{,}9332 - 0{,}1056 = \mathbf{0{,}8276\ (82{,}76\%)}$$

Kesimpulan Quality Assurance: Sebanyak $82{,}76\%$ produk berada dalam spesifikasi standar, sementara $17{,}24\%$ produk lainnya harus di-reject/dikemas ulang.

Soal 12: Inversi Normal (Percentile Top 10%) untuk Insentif

KASUS

Sebuah platform e-commerce mencatat volume penjualan bulanan tiap mitra merchant berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 80$ juta rupiah dan simpangan baku $\sigma = 12$ juta rupiah. Manajemen ingin memberikan bonus insentif istimewa hanya kepada **10% mitra terbaik** (**Top 10%**).



Pertanyaan

1. Berapakah nilai skor Z batas yang menyisakan 10% luas area di ekor paling kanan? (Diketahui $\Phi(1, 28) \approx 0, 9000$).
2. Berapakah target omzet minimum (X^*) yang harus dicapai oleh seorang mitra agar berhak menerima bonus?

Pembahasan 12: Nilai Ambang Batas Inversi Normal

Solusi Langkah demi Langkah

1. Menentukan Skor Z Batas (Inversi Distribusi Kumulatif): Top 10% terbaik di ekor kanan berarti ada 90% data di sebelah kirinya ($P(Z \leq Z^*) = 0,90$). Dari tabel normal baku:

$$\Phi(Z^*) = 0,9000 \Longrightarrow \boldsymbol{Z^* \approx +1,28}$$

2. Menghitung Nilai Nyata X^* (Denormalisasi): Gunakan rumus inversi standarisasi:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Longleftrightarrow X = \mu + Z \cdot \sigma$$

Substitusikan nilai parameter:

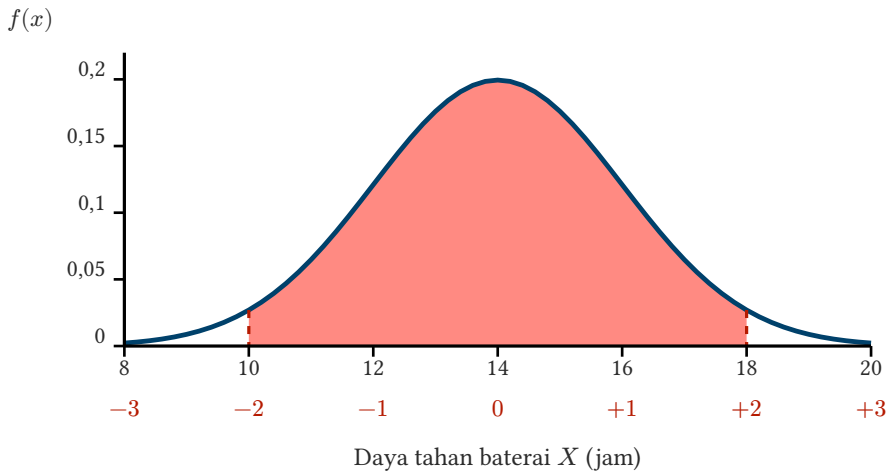
$$X^* = 80 + (1,28 \times 12) = 80 + 15,36 = \textbf{95,36 “juta rupiah“}$$

Rekomendasi Kebijakan Bisnis:
Manajemen harus menetapkan target penjualan bulanan minimal sebesar **Rp 95.360.000,-** sebagai syarat perolehan insentif agar penerima bonus tepat berada di kuartil teratas 10%.

Soal 13: Aturan Empiris $68 - 95 - 99,7$ pada Daya Tahan Baterai

KASUS

Daya tahan baterai sebuah model smartphone baru berdistribusi normal dengan rata-rata pemakaian $\mu = 14$ jam dan simpangan baku $\sigma = 2$ jam.



Pertanyaan (Tanpa Bantuan Tabel Z!)

Berdasarkan **Aturan Empiris Tiga Sigma**:

1. Berapakah persentase ponsel yang baterainya bertahan antara 10 hingga 18 jam?
2. Berapakah persentase ponsel yang baterainya bertahan antara 12 hingga 16 jam?
3. Berapakah peluang baterai ponsel bertahan **kurang dari 8 jam** ($P(X < 8)$)?

Pembahasan 13: Aplikasi Cepat Aturan Empiris

Solusi Langkah demi Langkah

1. Rentang 10 hingga 18 Jam ($\mu \pm 2\sigma$):

$$10 = 14 - 2(2) = \mu - 2\sigma \quad \text{dan} \quad 18 = 14 + 2(2) = \mu + 2\sigma$$

Berdasarkan aturan empiris, persis **95%** ponsel memiliki daya tahan di antara 10 hingga 18 jam.

2. Rentang 12 hingga 16 Jam ($\mu \pm 1\sigma$):

$$12 = 14 - 1(2) = \mu - 1\sigma \quad \text{dan} \quad 16 = 14 + 1(2) = \mu + 1\sigma$$

Berdasarkan aturan empiris, persis **68%** ponsel berada di rentang ini.

3. Peluang Baterai Sangat Buruk ($X < 8$ jam):

$$8 = 14 - 3(2) = \mu - 3\sigma$$

Di dalam rentang $\mu \pm 3\sigma$ (8 s.d. 20 jam) mencakup **99,7%** dari seluruh populasi. Sisa ponsel di luar 3σ adalah $100\% - 99,7\% = 0,3\%$. Karena kurva normal simetris, setengahnya berada di ekor kiri ($X < 8$):

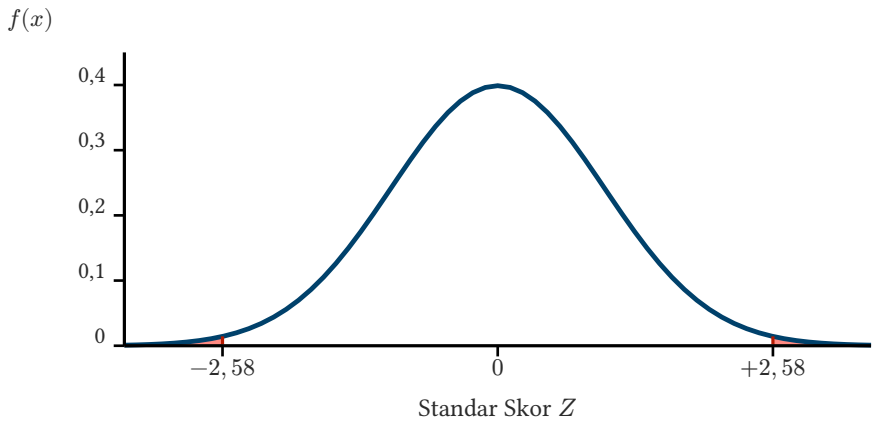
$$P(X < 8) = \frac{0.3\%}{2} = 0,15\% = 0,0015$$

Hanya ada 15 dari setiap 10.000 baterai yang memiliki performa seburuk itu.

Soal 14: Quality Control & Deteksi Anomali Dua Sisi pada Transmisi IoT

KASUS

Sebuah jaringan sensor IoT mengirimkan data suhu lingkungan yang telah dinormalisasi ke dalam bentuk normal baku $Z \sim N(0, 1)$. Sebuah algoritma pertahanan siber mencurigai adanya gangguan atau peretasan jika sinyal menyimpang secara ekstrem ke dua arah ($|Z| > 2,58$).



Pertanyaan

1. Diketahui nilai tabel kumulatif $\Phi(2,58) = 0,9951$. Hitung probabilitas sinyal normal secara keliru memicu alarm anomali (**False Alarm Rate** / $P(|Z| > 2,58)$)!
2. Jika sensor mengirimkan 100.000 paket sinyal per hari dalam kondisi normal, berapa rata-rata alarm palsu yang akan timbul setiap harinya?

Pembahasan 14: Deteksi Anomali Dua Sisi & False Alarm

Solusi Langkah demi Langkah

1. Menghitung Peluang Anomali Dua Sisi $P(|Z| > 2,58)$: Peluang dua sisi terdiri dari ekor kiri dan ekor kanan:

$$P(|Z| > 2,58) = P(Z < -2,58) + P(Z > 2,58)$$

Karena simetris:

$$P(Z > 2,58) = 1 - \Phi(2,58) = 1 - 0,9951 = 0,0049$$

$$P(Z < -2,58) = 0,0049$$

Maka total **False Alarm Rate** (α):

$$P(|Z| > 2,58) = 2 \times 0,0049 = \mathbf{0,0098 \text{ approx } 0,01\ (1\%)}$$

2. Estimasi Jumlah False Alarm Harian:

$$\text{Jumlah Alarm Palsu} = N \times P(|Z| > 2,58) = 100.000 \times 0,0098 = \mathbf{980 \text{ “alarm/hari“}}$$

Rekomendasi Rekayasa Data: Meskipun peluang kesalahan sangat kecil (hanya 1%), pada sistem bertransaksi tinggi (100.000 transaksi), 980 alarm palsu dapat membanjiri tim keamanan. Perlu ditingkatkan ambang batas ke $|Z| > 3$ atau menggunakan filter rentang waktu.

Ringkasan Formula Penting (Peubah Acak Kontinu)

PDF, CDF & Ekspektasi Umun

- Syarat PDF: $f(x) \geq 0$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- Peluang Titik: $P(X = c) = 0$
- Peluang Interval: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- CDF: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ dan $f(x) = F'(x)$
- Mean: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- Varians: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Distribusi Khusus

- **Uniform $U(a, b)$:**
$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $\mu = \frac{a+b}{2}$, $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
- **Eksponensial $\mathrm{Exp}(\lambda)$:**
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $P(X > t) = e^{-\lambda t}$
$\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, sifat **memoryless**.
- **Normal $N(\mu, \sigma^2)$:**
Standarisasi $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
Aturan Empiris: $68\%(1\sigma)$, $95\%(2\sigma)$, $99,7\%(3\sigma)$