Aplikasi Turunan: Laju Terkait, Optimasi & Nilai Ekstrim

Diferensiasi implisit terhadap waktu, analisis puncak-lembah kurva, dan pemodelan efisiensi komputasi

Kalkulus · Pertemuan 07

Peta Pertemuan 07

1. **Laju Ubah yang Berhubungan (Related Rates):** Menganalisis laju dinamika variabel yang saling terikat secara geometris menggunakan diferensiasi implisit terhadap waktu t.
2. **Nilai Ekstrim: Maksimum & Minimum:** Menguasai konsep ekstrim absolut vs lokal, Teorema Nilai Ekstrim (EVT), anatomi titik kritis, dan Metode Interval Tertutup.
3. **Uji Karakterisasi Titik Ekstrim:** Menggunakan Uji Turunan Pertama (perubahan tanda gradien) dan Uji Turunan Kedua (kurvatur) untuk membedakan puncak dan lembah.
4. **Masalah Pemodelan Optimasi Terapan:** Merumuskan fungsi objektif dengan kendala geometris/biaya untuk memecahkan masalah efisiensi bahan dan kapasitas maksimum.
5. **Relevansi Komputasi & Machine Learning:** Memahami minimasi fungsi loss melalui kondisi stasioner gradien nol, fondasi algoritma **Gradient Descent**, dan persiapan UTS.

Bagian 1 — Laju Ubah yang Berhubungan

Diferensiasi Implisit terhadap Waktu t & Dinamika Geometri Terkait

Konsep Dasar Laju Terkait (Related Rates)

Diferensiasi terhadap Waktu

- Dalam dunia nyata, variabel-variabel fisik saling terikat melalui hubungan fisis atau geometris.
- Jika variabel berubah terhadap waktu t, laju perubahannya terikat melalui **aturan rantai**:

$$\frac{d}{dt}[f(u)] = f'(u) \cdot \frac{du}{dt}$$

- **Kunci Utama:** Kita mencari laju perubahan suatu variabel yang sulit diukur langsung dengan memanfaatkan laju variabel lain yang sudah diketahui.

Contoh Skenario Komputasi & Fisika

- **Sensor Radar:** Laju perubahan jarak pandang miring terhadap kecepatan horizontal drone.
- **Sistem Fluida:** Laju kenaikan tinggi cairan tangki terhadap debit pompa masuk.
- **Game Physics:** Laju peregangan tali/rantai objek kinematik terhadap pergerakan sendi (**joint**).

Prosedur Baku 5 Langkah Menyelesaikan Laju Terkait

Algoritma Pemecahan Masalah Sistematis

1. **Langkah 1 (Visualisasi & Variabel):** Gambar sketsa sistem, beri label konstanta (ukuran tetap) dan variabel yang berubah terhadap waktu t (misal $x(t), y(t), V(t)$).
2. **Langkah 2 (Daftar Laju):** Catat laju yang diketahui nilainya (misal $\frac{dx}{dt} = 2$ m/s) dan laju target yang dicari (misal $\frac{dy}{dt} = ?$).
3. **Langkah 3 (Persamaan Penghubung):** Tulis persamaan matematika murni (Pythagoras, volume, kesebangunan) yang menghubungkan variabel-variabel tersebut **sebelum diturunkan**.
4. **Langkah 4 (Diferensiasi Implisit):** Turunkan kedua ruas persamaan terhadap waktu t menggunakan aturan rantai.
5. **Langkah 5 (Substitusi Nilai Sesaat):** Masukkan nilai-nilai variabel pada momen spesifik yang ditanyakan untuk menghitung laju target.

Peringatan Kritis: JANGAN mensubstitusikan nilai numerik variabel yang berubah sebelum proses diferensiasi pada Langkah 4 selesai!

Kasus 1: Model Geometri Tangga Merosot

Deskripsi Masalah

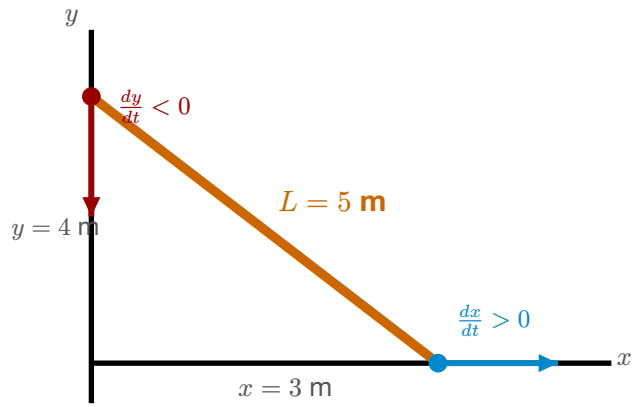
Sebuah tangga sepanjang $L = 5$ m bersandar di dinding vertikal licin.

- Ujung bawah ditarik menjauhi dinding dengan laju konstan:

$$\frac{dx}{dt} = 1.2 \ \ \text{m/s}$$

- **Pertanyaan:** Seberapa cepat ujung atas tangga merosot turun ($\frac{dy}{dt}$) pada saat ujung bawah berjarak $x = 3$ m dari dinding?

Diagram Geometri Tangga Merosot



Persamaan penghubung: Teorema Pythagoras $x^2 + y^2 = L^2$.

Kasus 1: Evaluasi Aljabar Laju Tangga

Langkah 3 & 4: Penurunan Rumus

Hubungan Pythagoras antara jarak horizontal $x(t)$ dan tinggi vertikal $y(t)$:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2 = 25$$

Turunkan kedua ruas terhadap waktu t secara implisit:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Langkah 5: Evaluasi Numerik saat $x = 3$ m

- Tinggi vertikal tangga: $y = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ m.
- Kecepatan vertikal tangga:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1.2) = -0.9 \ \ \text{m/s}$$

- **Interpretasi Fisis:** Tanda negatif menunjukkan ketinggian y berkurang; ujung atas tangga meluncur ke bawah dengan kelajuan 0.9 m/s.

Kasus 2: Pengisian Tangki Kerucut Terbalik

Deskripsi Masalah

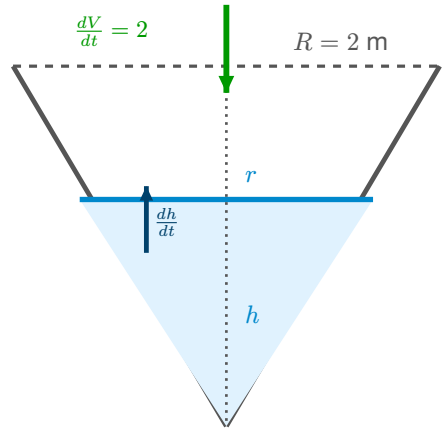
Tangki air berbentuk kerucut terbalik dengan jari-jari atas $R = 2$ m dan tinggi $H = 4$ m.

- Air dipompa masuk dengan debit konstan:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{menit}$$

- **Pertanyaan:** Berapa laju kenaikan permukaan air ($\frac{dh}{dt}$) saat kedalaman air mencapai $h = 3$ m?

Geometri Kerucut & Segitiga Sebangun



Kesebangunan segitiga mengeliminasi r: $\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Kasus 2: Perhitungan Laju Kenaikan Air Kerucut

Eliminasi Variabel melalui Kesebangunan Segitiga

Volume kerucut air adalah $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Karena tangki memiliki rasio konstan:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}h$$

Substitusikan r ke dalam rumus volume:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$$

Diferensiasi dan Evaluasi pada $h = 3$ m

Turunkan terhadap waktu t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi(3h^2)\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{4\left(d\frac{V}{d}t\right)}{\pi h^2}$$

Substitusikan $\frac{dV}{dt} = 2$ dan $h = 3$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4(2)}{\pi(3^2)} = \frac{8}{9\pi} \approx 0.283 \ \ \text{m/menit}$$

Kasus 3: Pelacakan Radar terhadap Objek Bergerak

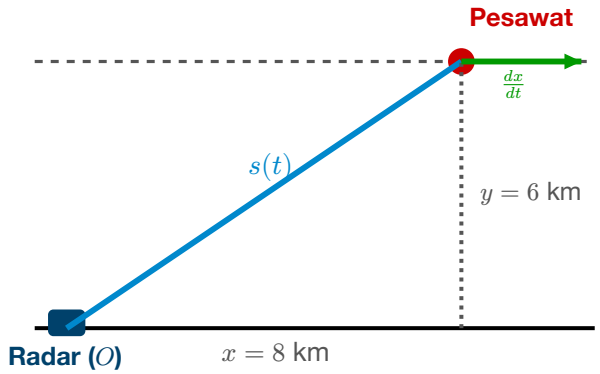
Deskripsi Sensor Pelacak (Tracking)

Pesawat pengawas terbang horizontal pada ketinggian konstan $y = 6$ km dengan kecepatan konstan:

$$\frac{dx}{dt} = 480 \ \ \text{km/jam}$$

- Radar stasioner berada di permukaan tanah (O).
- **Pertanyaan:** Berapa laju perubahan jarak langsung radar ke pesawat ($\frac{ds}{dt}$) saat jarak horizontal $x = 8$ km?

Diagram Pelacakan Radar Sensor



Jarak miring $s^2 = x^2 + y^2$. Ketinggian y bernilai konstan.

Kasus 3: Perhitungan Laju Jarak Radar

Diferensiasi dengan Variabel Konstan y

Hubungan Pythagoras antara jarak radar dan posisi pesawat:

$$s(t)^2 = x(t)^2 + 6^2 = x(t)^2 + 36$$

Karena ketinggian pesawat konstan ($y = 6$), maka $\frac{dy}{dt} = 0$. Turunkan terhadap t:

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt}$$

Evaluasi saat $x = 8$ km

- Jarak langsung miring radar ke pesawat: $s = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ km.
- Laju pertambahan jarak langsung s:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{10}(480) = 384 \ \ \text{km/jam}$$

- **Analisis Komputasi:** Laju pemindaian sinyal Doppler radar mendeteksi kecepatan radial 384 km/jam (lebih rendah daripada kecepatan darat aktual 480 km/jam).

Bagian 2 — Nilai Ekstrim Fungsi

Maksimum-Minimum Absolut & Lokal, Teorema Nilai Ekstrim (EVT), dan Titik Kritis

Ekstrim Absolut (Global) vs Ekstrim Lokal (Relatif)

Ekstrim Absolut / Global

Berlaku untuk **seluruh domain** fungsi D:

- **Maksimum Absolut:** Nilai $f(c)$ sedemikian rupa sehingga:

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in D$$

- **Minimum Absolut:** Nilai $f(c)$ sedemikian rupa sehingga:

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

Hanya ada **tepat satu nilai** tinggi maksimum/minimum absolut (meskipun bisa dicapai di beberapa titik berbeda).

Ekstrim Lokal / Relatif

Berlaku pada **lingkungan terbuka sekitar** c:

- **Maksimum Lokal:** $f(c) \geq f(x)$ untuk seluruh x pada suatu selang terbuka di sekitar c.
- **Minimum Lokal:** $f(c) \leq f(x)$ untuk seluruh x pada suatu selang terbuka di sekitar c.

Bisa terdapat **banyak** puncak bukit dan lembah lokal dalam satu grafik fungsi.

Teorema Nilai Ekstrim & Teorema Fermat

Teorema Nilai Ekstrim (Extreme Value Theorem - EVT)

Jika $f(x)$ **kontinu** pada interval tertutup $[a, b]$, maka f **pasti mencapai**:

- Nilai maksimum absolut setidaknya di satu titik $c_1 \in [a, b]$.
- Nilai minimum absolut setidaknya di satu titik $c_2 \in [a, b]$.

Syarat Kunci: Fungsi harus kontinu dan interval harus tertutup $[a, b]$!

Teorema Fermat

Jika f memiliki nilai ekstrim lokal di titik c, dan jika turunan $f'(c)$ ada, maka:

$$f'(c) = 0$$

Arti Geometris: Di puncak atau lembah yang mulus, garis singgung kurva harus mendatar (horizontal).

Anatomi Titik Kritis: Stasioner vs Singular

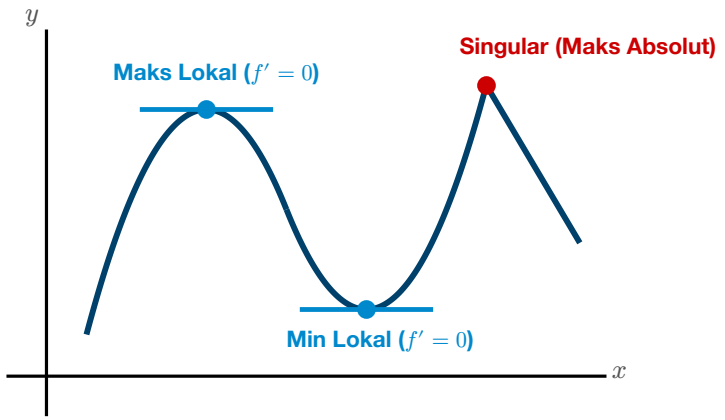
Definisi Titik Kritis (Critical Points)

Titik c dalam domain f disebut **titik kritis** jika:

1. **Titik Stasioner:** $f'(c) = 0$ (garis singgung horizontal).
2. **Titik Singular:** $f'(c)$ **tidak ada** (sudut tajam/cusp, patahan, atau garis singgung vertikal).

Catatan Penting: Titik kritis adalah **kandidat** tempat terjadinya ekstrim. Tidak semua titik kritis otomatis menjadi titik ekstrim (contoh: $f(x) = x^3$ di $x = 0$).

Visualisasi Titik Kritis & Ekstrim



Ekstrim dapat terjadi di titik stasioner, titik singular, atau titik ujung.

Metode Interval Tertutup (Closed Interval Method)

Prosedur Menentukan Ekstrim Absolut pada $[a, b]$

Untuk menemukan nilai maksimum dan minimum absolut dari fungsi kontinu f pada interval tertutup $[a, b]$:

1. **Langkah 1:** Temukan semua titik kritis $c \in (a, b)$ dengan menyelesaikan $f'(c) = 0$ atau mencari tempat $f'(c)$ tidak ada.
2. **Langkah 2:** Evaluasi nilai fungsi pada seluruh titik kritis: $f(c)$.
3. **Langkah 3:** Evaluasi nilai fungsi pada kedua titik ujung interval: $f(a)$ dan $f(b)$.
4. **Langkah 4 (Keputusan):**
   - Nilai **terbesar** dari langkah 2 dan 3 adalah **Maksimum Absolut**.
   - Nilai **terkecil** dari langkah 2 dan 3 adalah **Minimum Absolut**.

Contoh Terpandu: Ekstrim Absolut Polinomial

Soal: Tentukan Ekstrim Absolut $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ pada $[-2, 3]$

Langkah 1: Cari Titik Kritis:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1) = 0$$

Titik kritis berada di $x = -1$ dan $x = 2$ (keduanya berada di dalam interval tertutup $[-2, 3]$).

Langkah 2 & 3: Evaluasi Seluruh Kandidat:

- Titik kritis $x = -1$: $f(-1) = 2(-1) - 3(1) - 12(-1) + 1 = -2 - 3 + 12 + 1 = \mathbf{8}$
- Titik kritis $x = 2$: $f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = \mathbf{-19}$
- Titik ujung $x = -2$: $f(-2) = 2(-8) - 3(4) - 12(-2) + 1 = -16 - 12 + 24 + 1 = \mathbf{-3}$
- Titik ujung $x = 3$: $f(3) = 2(27) - 3(9) - 12(3) + 1 = 54 - 27 - 36 + 1 = \mathbf{-8}$

Kesimpulan:

- **Maksimum Absolut:** 8 (tercapai di $x = -1$).
- **Minimum Absolut:** -19 (tercapai di $x = 2$).

Bagian 3 — Uji Karakterisasi Titik Ekstrim

Uji Turunan Pertama (Tanda Lereng) & Uji Turunan Kedua (Kurvatur Kelengkungan)

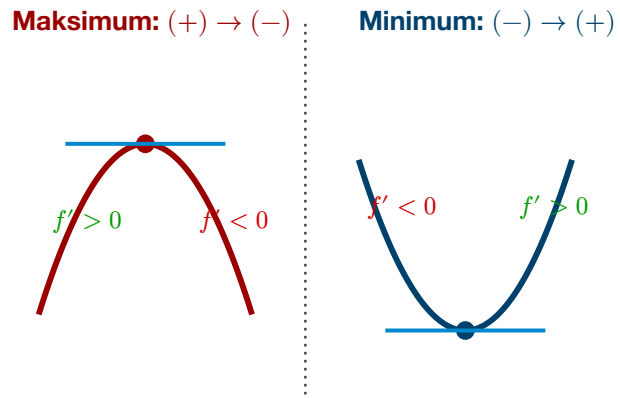
Uji Turunan Pertama (First Derivative Test)

Karakterisasi via Perubahan Tanda $f'(x)$

Misalkan c adalah titik kritis dari fungsi kontinu f:

- **Maksimum Lokal:** $f'(x)$ berganti tanda dari **positif (+) ke negatif (−)**. Kurva mendaki lalu menurun.
- **Minimum Lokal:** $f'(x)$ berganti tanda dari **negatif (−) ke positif (+)**. Kurva menurun lalu mendaki.
- **Bukan Ekstrim (Titik Belok / Infleksi):** $f'(x)$ **tidak berganti tanda** (tetap $+$ atau tetap $-$) saat melewati c.

Visualisasi Perubahan Tanda Lereng



Tanda turunan pertama menunjukkan arah naik/turun fungsi.

Uji Turunan Kedua (Second Derivative Test)

Pemanfaatan Kelengkungan Kurva (Concavity)

Misalkan $f''(x)$ kontinu di sekitar c, dan c adalah titik stasioner ($f'(c) = 0$):

1. **Jika $f''(c) < 0$ (Cekung ke Bawah / ∩):**

$$f'(c) = 0 \quad \text{dan} \quad f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) \ \text{adalah Maksimum Lokal}$$

   Kurva melengkung ke bawah seperti kubah; titik stasioner berada di puncak tertinggi kubah.

1. **Jika $f''(c) > 0$ (Cekung ke Atas / ∪):**

$$f'(c) = 0 \quad \text{dan} \quad f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) \ \text{adalah Minimum Lokal}$$

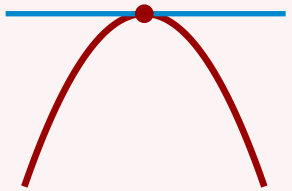
   Kurva melengkung ke atas seperti mangkuk; titik stasioner berada di dasar terendah mangkuk.

Visualisasi Perbandingan Uji Turunan Kedua

Geometri Uji Turunan Kedua di Titik Stasioner $f'(c) = 0$

Maksimum Lokal ($f'' < 0$)

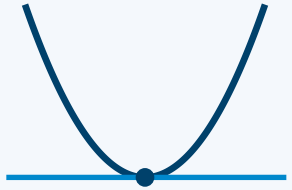
Kurva cekung ke bawah (∩), di bawah garis singgung



Puncak Kubah (Maksimum)

Minimum Lokal ($f'' > 0$)

Kurva cekung ke atas (∪), di atas garis singgung



Dasar Lembah (Minimum)

Kasus Kegagalan Uji Turunan Kedua ($f''(c) = 0$)

Keterbatasan Uji Turunan Kedua

Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) = 0$, maka Uji Turunan Kedua **GAGAL (inkonklusif)**. Kita tidak dapat menyimpulkan apapun dan **wajib kembali ke Uji Turunan Pertama**!

$f(x) = x^3$ **di** $x = 0$

- $f'(0) = 0, f''(0) = 0$
- Tanda $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.
- Tidak berganti tanda.
- **Hasil:** Bukan titik ekstrim (Titik Belok / Sadle).

$f(x) = x^4$ **di** $x = 0$

- $f'(0) = 0, f''(0) = 0$
- Tanda $f'(x) = 4x^3$: berganti dari $(-)$ ke $(+)$.
- **Hasil:** Minimum Lokal (murni).

$f(x) = -x^4$ **di** $x = 0$

- $f'(0) = 0, f''(0) = 0$
- Tanda $f'(x) = -4x^3$: berganti dari $(+)$ ke $(-)$.
- **Hasil:** Maksimum Lokal (murni).

Bagian 4 — Masalah Pemodelan Optimasi

Fungsi Objektif, Persamaan Kendala Geometris, dan Efisiensi Desain

Paradigma Optimasi: Objektif vs Kendala

1. Fungsi Objektif (Target)

Kuantitas utama yang ingin kita **maksimalkan** atau **minimalkan**:

- Memaksimalkan Volume kotak V.
- Memaksimalkan Keuntungan / Kapasitas data.
- Meminimalkan Biaya produksi C.
- Meminimalkan Luas bahan / Waktu latensi.

Biasanya fungsi ini awalnya memuat lebih dari satu variabel (misal $V = xyz$).

2. Persamaan Kendala (Constraint)

Batasan fisik, geometri, atau anggaran yang mengikat variabel-variabel tersebut:

- Luas karton terbatas $1200\ \text{cm}^2$.
- Panjang kawat pagar tepat 100 m.
- Kapasitas volume kaleng harus $1000\ \text{cm}^3$.

Fungsi Kendala: Digunakan untuk mengeliminasi variabel sehingga fungsi objektif hanya memiliki **satu variabel bebas**.

Prosedur Baku 5 Langkah Pemodelan Optimasi

Algoritma Pemecahan Masalah Optimasi

1. **Langkah 1 (Identifikasi):** Tentukan apa kuantitas yang ingin dimaksimalkan/diminimalkan (fungsi objektif) dan apa batasannya (persamaan kendala).
2. **Langkah 2 (Gambar & Beri Notasi):** Buat diagram sketsa masalah dan tetapkan variabel-variabel matematika.
3. **Langkah 3 (Reduksi Variabel):** Gunakan persamaan kendala untuk menyatakan semua variabel dalam bentuk **satu variabel tunggal** x, menghasilkan fungsi objektif $f(x)$.
4. **Langkah 4 (Tentukan Domain Fisibilitas):** Tentukan interval realistis bagi variabel x berdasarkan batas fisik (misal panjang harus positif $x > 0$).
5. **Langkah 5 (Diferensiasi & Pengujian):** Cari titik kritis dengan menyelesaikan $f'(x) = 0$, lalu uji menggunakan Uji Turunan Pertama/Kedua atau Metode Interval Tertutup.

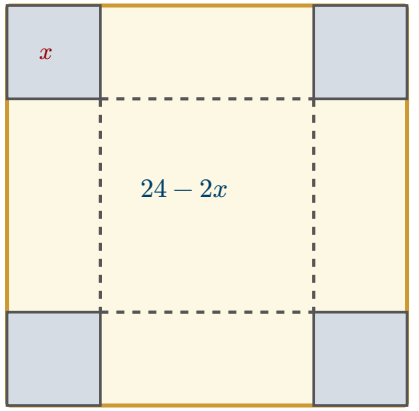
Kasus Optimasi 1: Desain Kotak Karton Terbuka

Deskripsi Masalah

Selembar karton persegi berukuran $24\ \text{cm} \times 24\ \text{cm}$ akan dibuat menjadi kotak tanpa tutup dengan memotong bujur sangkar berukuran $x \times x$ di keempat sudutnya, lalu melipat sisi-sisinya ke atas.

- **Pertanyaan:** Berapa ukuran potongan x agar volume kotak yang dihasilkan **maksimum**?

Sketsa Karton & Kotak Lipat



Tinggi: x

Alas: $(24 - 2x)^2$

Volume kotak: $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Domain: $0 < x < 12$.

Kasus Optimasi 1: Penurunan Aljabar & Solusi

Formulasi Fungsi Volume & Pencarian Titik Kritis

Volume kotak sebagai fungsi satu variabel x:

$$V(x) = x(24 - 2x)^2 = x(576 - 96x + 4x^2) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$$

Domain fisis: karena panjang karton 24 cm, maka $0 < x < 12$.

Turunkan terhadap x dan samakan dengan nol:

$$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48) = 12(x - 4)(x - 12) = 0$$

Titik kritis di $x = 12$ berada di luar domain terbuka (menghasilkan volume nol). Kandidat tunggal yang layak adalah **titik kritis $x = 4$ cm**.

Uji Turunan Kedua & Volume Maksimum

- $V''(x) = 24x - 192 \Rightarrow V''(4) = 24(4) - 192 = 96 - 192 = -96 < 0$ (**Terbukti Maksimum!**).
- **Volume Maksimum:**

$$V(4) = 4(24 - 8)^2 = 4(16^2) = 4(256) = 1024 \text{ cm}^3$$

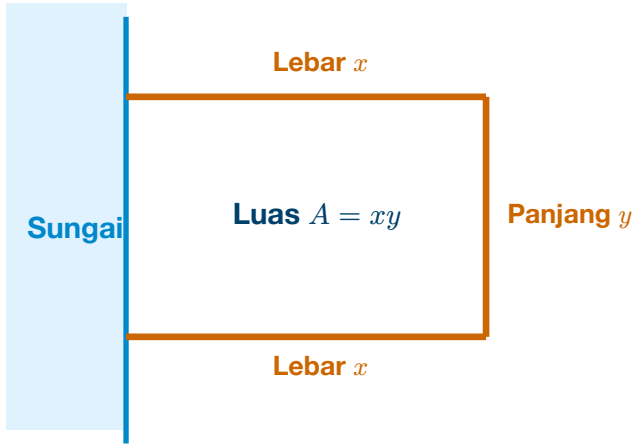
Kasus Optimasi 2: Pemagaran Lahan di Tepi Sungai

Deskripsi Masalah

Seorang peternak ingin memagari area persegi panjang di samping sungai lurus. Sisi yang berbatasan dengan sungai **tidak perlu dipagari**.

- Total panjang kawat pagar yang tersedia adalah $L = 2400$ meter.
- **Pertanyaan:** Berapa dimensi lahan (x dan y) agar luas area yang terpagari **maksimum**?

Diagram Lahan dan Sungai



Kendala kawat: $2x + y = 2400$. Objektif: Maksimumkan $A = xy$.

Kasus Optimasi 2: Solusi Rasio Optimal Lahan

Substitusi Kendala ke Fungsi Objektif

- Persamaan Kendala Kawat: $2x + y = 2400 \Rightarrow y = 2400 - 2x$.
- Fungsi Objektif Luas:

$$A(x) = xy = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

- Domain fisis: $0 < x < 1200$.

Diferensiasi & Hasil Optimal

- Turunan pertama: $A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 2400 \Rightarrow \boldsymbol{x = 600}\ \ \mathrm{m}$.
- Uji turunan kedua: $A''(x) = -4 < 0$ (**Pasti Maksimum!**).
- Panjang sisi sejajar sungai: $y = 2400 - 2(600) = \boldsymbol{1200}\ \ \mathrm{m}$.
- **Luas Maksimum:**

$$A_{\text{maks}} = 600 \times 1200 = 720.000\ \mathrm{m}^2 = 72\ \ \text{hektar}$$

- **Hukum Rasio Emas:** Panjang sisi sejajar sungai selalu tepat **dua kali** lebar sisi tegak lurus ($y = 2x$).

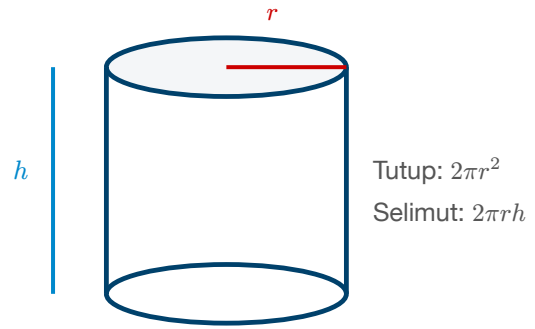
Kasus Optimasi 3: Desain Tabung Silinder Hemat Bahan

Deskripsi Masalah Rekayasa

Sebuah pabrik memproduksi kaleng minuman silinder tertutup dengan kapasitas volume tetap $V_0 = 1000\ \text{cm}^3$ (1 liter).

- **Tujuan Desain:** Meminimalkan luas permukaan logam (A) yang digunakan guna menghemat biaya bahan baku.
- **Pertanyaan:** Berapakah rasio geometris antara tinggi kaleng (h) dan jari-jari (r) yang paling optimal?

Geometri Tabung Silinder



Objektif: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Kendala: $V_0 = \pi r^2 h$.

Kasus Optimasi 3: Bukti Rasio Emas Tabung $h = 2r$

Penurunan Matematis Luas Permukaan Minimum

1. Nyatakan tinggi h dari persamaan volume: $V_0 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V_0}{\pi r^2}$.
2. Substitusikan h ke dalam fungsi luas permukaan:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V_0}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$$

3. Turunkan terhadap r dan samakan dengan nol:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r = \frac{2V_0}{r^2} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r^3 = V_0$$

4. Substitusikan kembali $V_0 = \pi r^2 h$:

$$2\pi r^3 = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad 2r = h \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h = 2r}$$

Prinsip Desain Optimal: Kaleng silinder paling hemat bahan terjadi jika **tinggi tabung sama dengan diameternya ($h = 2r$)**, menghasilkan silinder berbentuk bujur sangkar dari tampak samping.

Bagian 5 — Relevansi Komputasi & Sains Data

Dari Minimasi Fungsi Loss Machine Learning hingga Persiapan Ujian Tengah Semester

Paradigma Optimasi dalam Machine Learning

Pelatihan Model = Masalah Optimasi Minimasi

Dalam kecerdasan buatan, proses “belajar” (**training**) hakikatnya adalah menyelesaikan masalah optimasi matematis:

$$\boldsymbol{w}^* = \arg\,\min_{\boldsymbol{w}} \mathcal{L}(\boldsymbol{w})$$

- $\mathcal{L}(w)$ adalah **Fungsi Kerugian (Loss / Cost Function)** yang mengukur seberapa jauh tebakan model dari data riil.
- w adalah bobot parameter model yang dicari agar error seminimal mungkin.
- Berdasarkan Teorema Fermat, kondisi optimum tercapai ketika gradien bernilai nol:

$$\nabla \mathcal{L}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0} \quad \left(\text{dalam 1D: } \tfrac{d\mathcal{L}}{dw} = 0\right)$$

Algoritma Gradient Descent & Kondisi Stasioner

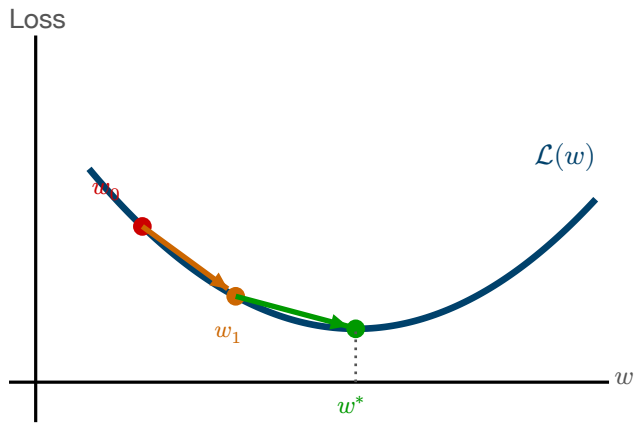
Menuruni Lereng Gradien secara Numerik

Ketika fungsi loss terlalu rumit untuk diselesaikan secara analitis ($L'(w) = 0$ non-linear), komputer memperbarui bobot secara berulang (**iterative**):

$$w_{k+1} = w_k - \eta \cdot \frac{d\mathcal{L}}{dw}$$

- Jika lereng positif ($L' > 0$), bobot digeser ke kiri (w mengecil).
- Jika lereng negatif ($L' < 0$), bobot digeser ke kanan (w membesar).
- Saat mendekati titik minimum, $|L'| \to 0$, langkah pembaruan melambat secara otomatis.

Visualisasi Gradient Descent pada Lembah Loss



Iterasi bergerak menuruni lereng menuju titik stasioner minimum w^*.

Optimasi Komputasi: Bounding Box & Jaringan

Grafika & Deteksi Tabrakan (Collision)

- **Axis-Aligned Bounding Box (AABB):** Menemukan batas koordinat terkecil $[x_{\text{min}}, x_{\text{maks}}] \times [y_{\text{min}}, y_{\text{maks}}]$ yang membungkus objek kurva bergerak.
- Titik ekstrim kurva parametrik $x'(t) = 0$ dan $y'(t) = 0$ menentukan batas luar kotak pembungkus secara presisi untuk efisiensi **rendering** dan komputasi fisika game.

Throughput Jaringan Komputer

- **Ukuran Paket Data Optimal (MTU):** Jika ukuran paket data s terlalu kecil, overhead header protokol mendominasi. Jika s terlalu besar, probabilitas **packet loss** dan **retransmission** melonjak.
- Memodelkan efisiensi transfer $E(s)$ dan mencari $E'(s) = 0$ memberikan ukuran paket optimal untuk **throughput** maksimal.

Rangkuman Formula Kunci Pertemuan 07

Sintesis Materi Pokok

1. **Laju Terkait (Related Rates):** $\frac{d}{dt}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dt}$. Turunkan persamaan penghubung sebelum mensubstitusikan nilai numerik sesaat.
2. **Titik Kritis:** Titik dalam domain tempat $f'(c) = 0$ (stasioner) atau $f'(c)$ tidak ada (singular).
3. **Uji Turunan Pertama:** $(+) \to (-) \Rightarrow$ Maksimum lokal;quad $(-) \to (+) \Rightarrow$ Minimum lokal.
4. **Uji Turunan Kedua:** $f'(c) = 0$ dan $f''(c) < 0 \Rightarrow$ Maksimum;quad $f''(c) > 0 \Rightarrow$ Minimum;quad $f''(c) = 0 \Rightarrow$ Uji gagal.
5. **Pemodelan Optimasi:** Substitusikan persamaan kendala ke dalam fungsi objektif hingga menjadi satu variabel bebas, lalu selesaikan $f'(x) = 0$.

Peta Jalan Menuju Ujian Tengah Semester (UTS)

Cakupan Materi UTS (Pertemuan 01 - 07)

Pertemuan 08 adalah **Ujian Tengah Semester (UTS)**. Silabus mencakup seluruh fondasi kalkulus diferensial:

- **P01 - P03:** Sistem bilangan riil & kompleks, fungsi, relasi, domain, dan invers.
- **P04:** Konsep limit fungsi di satu titik, limit sepihak, dan kontinuitas.
- **P05:** Aturan dasar turunan aljabar/trigonometri, aturan rantai, dan turunan implisit.
- **P06:** Turunan fungsi parameter, turunan kedua parameter, dan turunan tingkat tinggi (n-th order).
- **P07:** Laju terkait, nilai ekstrim, uji turunan 1 & 2, dan pemodelan optimasi terapan.

Tips Persiapan: Kuasai pemodelan aljabar, ketelitian diferensiasi implisit/rantai, dan interpretasi fisis/grafis!