Turunan Fungsi Parameter & Tingkat Tinggi

Diferensiasi kurva parametrik, laju perubahan berulang, dan fondasi komputasi grafika & optimasi

Kalkulus · Pertemuan 06

Peta Pertemuan 06

1. **Fungsi Parametrik & Turunan Pertama:** Membebaskan kalkulus dari keterbatasan fungsi eksplisit $y = f(x)$ untuk memodelkan kurva tertutup dan lintasan dinamis, serta menghitung $\frac{dy}{dx}$ melalui parameter waktu t.
2. **Turunan Kedua Parameter & Kecekungan:** Membedah penurunan $\frac{d^2y}{dx^2}$ secara tepat, membongkar miskonsepsi umum, dan menganalisis kelengkungan (**concavity**) kurva berparameter.
3. **Turunan Tingkat Tinggi (Higher-Order):** Menghitung laju perubahan berulang, memahami makna fisis kinematika ($s \to v \to a \to j$), serta menguasai pola ke-n dan Aturan Leibniz.
4. **Relevansi Komputasi, Grafika & Sains Data:** Menghubungkan kurva parameter dengan Kurva Bézier pada format SVG/CSS, uji kurvatur optimasi Machine Learning (Metode Newton), dan fondasi Deret Taylor.

Bagian 1 — Konsep Kurva Parameter & Turunan Pertama

Memodelkan Lintasan Dinamis dan Menghitung Gradien Garis Singgung

Motivasi: Dari Kurva Statis ke Lintasan Dinamis

Keterbatasan Bentuk Eksplisit $y = f(x)$

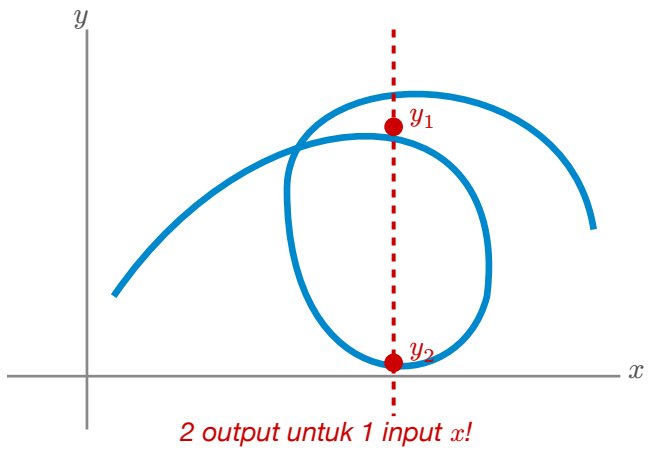
- Pada fungsi kartesius biasa, setiap satu nilai input x **hanya boleh** menghasilkan tepat satu output y (*Vertical Line Test*).
- Bentuk ini **gagal** memodelkan kurva melingkar, lintasan yang berbalik arah, simpul (**loop**), atau gerak partikel dinamis di ruang 2D/3D.

Solusi: Representasi Parametrik

- Koordinat x dan y sama-sama didefinisikan sebagai fungsi dari parameter independen ketiga (biasanya waktu t atau sudut θ):

$$x = x(t) \quad \text{dan} \quad y = y(t)$$

Uji Garis Vertikal pada Kurva Simpul



Fungsi parametrik mengatasi batasan ini secara elegan.

Anatomi & Komponen Kurva Parametrik

Definisi Matematis Kurva Berparameter

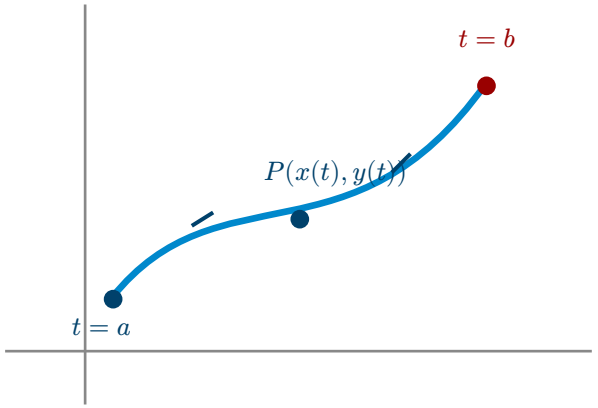
Kurva parametrik bidang didefinisikan oleh sepasang fungsi kontinu:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in [a, b]$$

Ciri-Ciri Utama:

- **Titik Awal:** $(x(a), y(a))$ saat $t = a$.
- **Titik Akhir:** $(x(b), y(b))$ saat $t = b$.
- **Orientasi (Arah):** Kurva memiliki **arah jejak** yang jelas seiring bertambahnya nilai parameter t.

Jejak Waktu dan Vektor Posisi $\vec{r}(t)$



Posisi partikel dapat dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$.

Katalog Kurva Parametrik (1): Lingkaran & Elips

Formulasi & Sifat Geometris

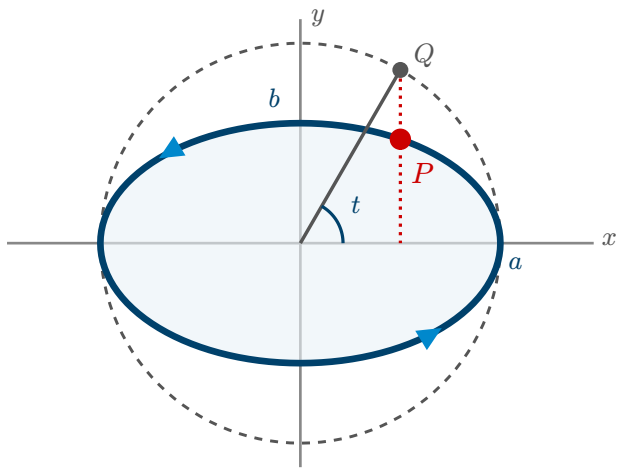
- **Persamaan Parametrik:**

$$x(t) = a\cos(t), \quad y(t) = b\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

  Jika $a = b = R$, kurva menjadi **lingkaran sempurna** berjari-jari R.

- **Makna Parameter t:** Untuk lingkaran, t adalah sudut pusat. Untuk elips, t adalah sudut pada **lingkaran bantu** berjari-jari a; titik P diperoleh dengan memproyeksikan titik Q secara vertikal ke elips.
- **Arah Lintasan: Berlawanan arah jarum jam** seiring bertambahnya t.
- **Eliminasi Parameter t:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

Elips $a = 75, b = 45$ dan Lingkaran Bantu $R = a$



$P = (a\cos t, b\sin t)$. Panah biru: arah gerak saat t bertambah.

Katalog Kurva Parametrik (2): Gerak Proyektil (Parabola)

Fisika Kinematika & Bentuk Parabola

- **Dekomposisi Gerak Independen:** Peluru ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 dan elevasi α:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

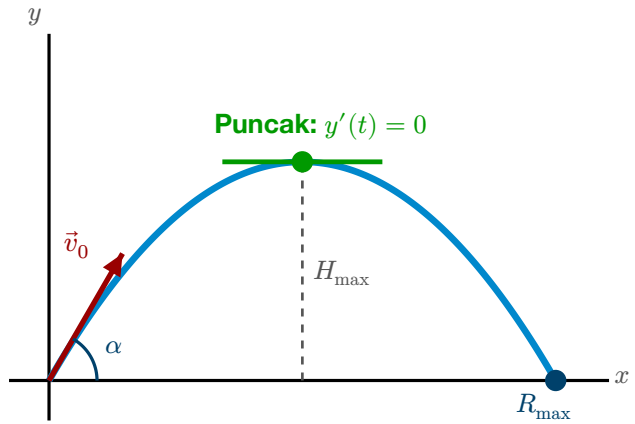
- **Eliminasi Waktu $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$:**

$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2$$

  Parabola terbuka ke bawah. Vektor $\vec{v}_0$ **menyinggung** parabola di titik awal.

- **Titik Puncak:** laju vertikal nol, $y'(t) = 0 \Rightarrow t_{\text{puncak}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, sehingga $H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Lintasan Proyektil $\alpha \approx 60°$



Kurva digambar langsung dari $x(t)$ dan $y(t)$; simetris terhadap garis puncak.

Katalog Kurva Parametrik (3): Kurva Sikloid (Cycloid)

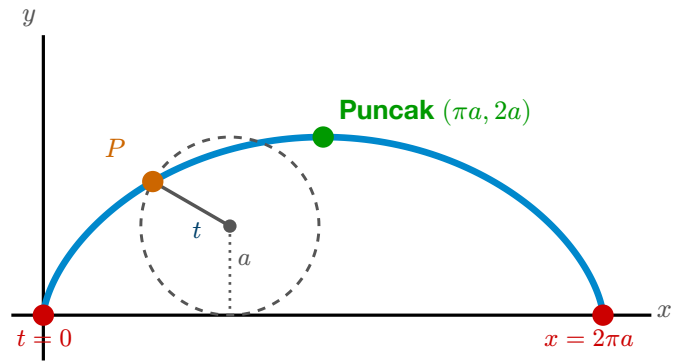
Geometri Roda Menggelinding

- **Definisi:** Jejak satu titik P pada keliling roda berjari-jari a yang menggelinding lurus tanpa slip di lantai datar.
- **Persamaan Parametrik:**

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t)$$

  t = sudut putar roda (radian); pusat roda berada di (at, a).
- **Karakteristik Kunci:**
  - **Titik tajam (cusp):** $y = 0$ saat $t = 0, 2\pi, \ldots$; kurva menyentuh lantai **tegak lurus**.
  - **Puncak:** $y = 2a$ saat $t = \pi$, tepat di $x = \pi a$.
  - **Lebar satu busur:** $2\pi a$ (keliling roda).
- **Fisika:** kurva **Brachistochrone** (turun tercepat) dan **Tautochrone**.

Satu Busur Sikloid (skala sebenarnya)



Roda putus-putus: posisi saat $t = 2\pi/3$; titik P menjejak kurva.

Penurunan Rumus Turunan Pertama via Aturan Rantai

Bagaimana menentukan kemiringan (gradien) garis singgung di bidang kartesius $\frac{dy}{dx}$ jika kedua variabel bergantung pada parameter waktu t?

Deduksi Matematis

Anggap y bergantung pada x, dan x bergantung pada t. Berdasarkan **Aturan Rantai (Chain Rule)**:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Bagi kedua ruas dengan laju horizontal $\frac{dx}{dt}$ (dengan syarat mutlak $\frac{dx}{dt} \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Makna Fisis: Gradien garis singgung di bidang kartesius adalah perbandingan antara **kecepatan sesaat vertikal** terhadap **kecepatan sesaat horizontal**.

Geometri Garis Singgung & Vektor Tangen

Hubungan Vektor dan Garis Singgung

- Pada titik $P(x(t_0), y(t_0))$, vektor kecepatan partikel adalah:

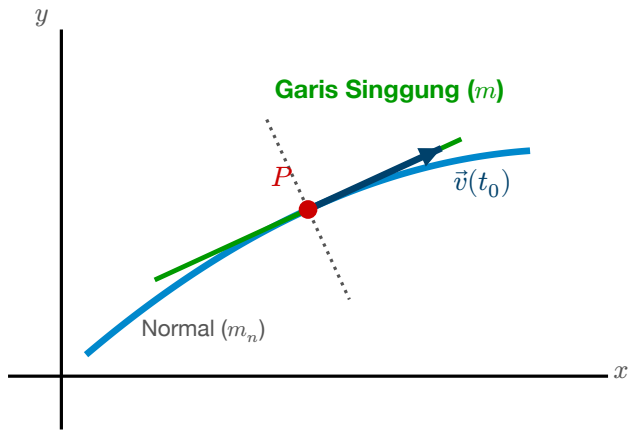
$$\vec{v}(t_0) = \langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$$

- Vektor ini menyinggung kurva secara langsung ke arah gerak.
- Kemiringan garis singgung kartesius m tepat sama dengan rasio komponen vektor:

$$m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \tan(\theta)$$

- Garis Normal tegak lurus garis singgung: $m_n = -\frac{1}{m}$.

Vektor Kecepatan dan Garis Singgung



Vektor kecepatan $\vec{v}(t)$ berimpit dengan garis singgung.

Kondisi Khusus: Garis Singgung Horizontal & Vertikal

Garis Singgung Horizontal (Mendatar)

Gradien nol ($m = 0$). Laju vertikal berhenti sejenak.

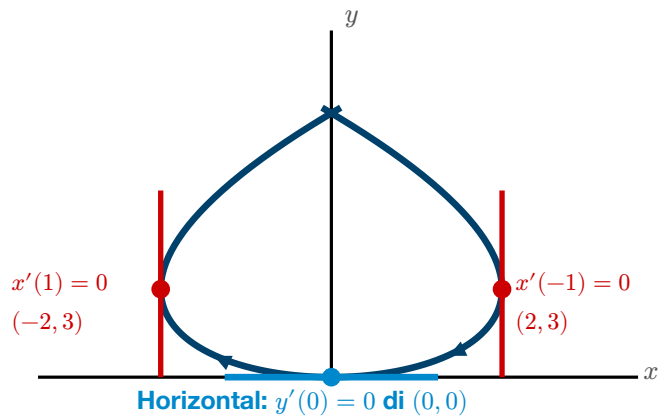
$$y'(t) = 0 \quad \text{dan} \quad x'(t) \neq 0$$

Garis Singgung Vertikal (Tegak)

Gradien tak terhingga ($m \to \infty$). Laju horizontal berhenti.

$$x'(t) = 0 \quad \text{dan} \quad y'(t) \neq 0$$

Kurva $x = t^3 - 3t, y = 3t^2$



Titik singgung horizontal di $(0, 0)$, vertikal di $(-2, 3)$ & $(2, 3)$.

Contoh 1: Gradien Garis Singgung Lingkaran (Formulasi)

Soal

Diberikan kurva lingkaran berparameter:

$$x(t) = 4\cos(t), \quad y(t) = 4\sin(t)$$

Tentukan rumus turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan hitung kemiringan garis singgung pada $t = \frac{\pi}{4}$.

Langkah Penyelesaian Aljabar

1. Turunkan masing-masing terhadap parameter t:

$$x'(t) = -4\sin(t), \quad y'(t) = 4\cos(t)$$

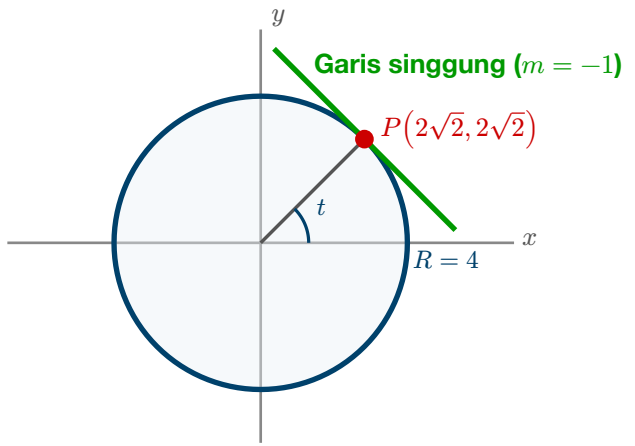
2. Terapkan rumus turunan parameter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos(t)}{-4\sin(t)} = -\cot(t) = -\frac{x}{y}$$

3. Evaluasi pada saat $t = \frac{\pi}{4}$:

$$m = -\cot\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -1$$

Geometri Singgungan di Kuadran I



Garis singgung tegak lurus jari-jari lingkaran di titik P.

Contoh 1: Persamaan Garis Singgung & Garis Normal

Menyusun Persamaan Garis pada $t = \frac{\pi}{4}$

Dari slide sebelumnya diperoleh:

- Titik Singgung: $x_0 = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \quad y_0 = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$
- Gradien Garis Singgung: $m = -1$.

1. Persamaan Garis Singgung (Tangent Line):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2\sqrt{2} = -1\left(x - 2\sqrt{2}\right)$$

$$y = -x + 4\sqrt{2} \quad \text{atau} \quad x + y - 4\sqrt{2} = 0$$

2. Persamaan Garis Normal (Normal Line): Garis normal tegak lurus garis singgung ($m_n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = 1$):

$$y - 2\sqrt{2} = 1\left(x - 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow y = x$$

Garis normal lingkaran selalu melewati titik pusat asal $(0, 0)$.

Contoh 2: Analisis Titik Garis Singgung Ekstrem

Soal

Sebuah kurva parametrik didefinisikan oleh:

$$x(t) = t^3 - 3t, \quad y(t) = 3t^2 - 9$$

Tentukan koordinat titik-titik di mana garis singgungnya **mendatar** dan **tegak**.

Solusi

Hitung turunan komponen: $x'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$ dan $y'(t) = 6t$.

Garis Singgung Horizontal ($y'(t) = 0, x'(t) \neq 0$):

$6t = 0 \Rightarrow t = 0$.

Koordinat titik:

$x(0) = 0^3 - 3(0) = 0$

$y(0) = 3(0)^2 - 9 = -9$

Titik Horizontal: $(0, -9)$

Garis Singgung Vertikal ($x'(t) = 0, y'(t) \neq 0$):

$3(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$ atau $t = -1$.

Saat $t = 1$: $x = 1 - 3 = -2, y = 3 - 9 = -6$.

Saat $t = -1$: $x = -1 + 3 = 2, y = 3 - 9 = -6$.

Titik Vertikal: $(-2, -6)$ **dan** $(2, -6)$

Bagian 2 — Turunan Kedua Fungsi Parameter & Kecekungan

Menghitung Laju Perubahan Gradien dan Menganalisis Kecekungan Kurva

Jebakan Klasik Turunan Kedua (The Parametric Trap!)

PERINGATAN: Kesalahan Paling Fatal yang Sering Terjadi!

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} \quad \text{~~SALAH BESAR!~~}$$

Mengapa Tidak Boleh Membagi Langsung?

- Simbol $\frac{d^2y}{dx^2}$ berarti: **"Diferensialkan gradien $\frac{dy}{dx}$ sekali lagi terhadap variabel x"**.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

- Perhatikan bahwa operator penurunannya adalah $\frac{d}{dx}$, **bukan** $\frac{d}{dt}$.
- Karena ekspresi $\frac{dy}{dx}$ masih mengandung parameter t, kita **wajib** menerapkan Aturan Rantai kembali untuk menurunkannya terhadap x.

Penurunan Rumus Turunan Kedua via Aturan Rantai

Misalkan gradien turunan pertama kita beri nama variabel perantara $u = \frac{dy}{dx}$:

Deduksi Langkah demi Langkah

1. Sesuai definisi turunan kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[u]$$

2. Karena fungsi u dinyatakan dalam parameter t, gunakan Aturan Rantai:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

3. Kembalikan variabel $u = \frac{dy}{dx}$ ke dalam persamaan:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y')'}{x'}$$

Prosedur Baku 3 Langkah Menghitung Turunan Kedua

Untuk mempermudah pengerjaan dan menghindari kesalahan aljabar, ikuti prosedur berikut:

Langkah 1: Hitung Turunan Pertama

Cari $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. **Sederhanakan aljabar bentuk ini semaksimal mungkin**.

Langkah 2: Turunkan Hasil Terhadap Parameter t

Turunkan ekspresi $\frac{dy}{dx}$ sekali lagi secara langsung terhadap t: $\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]$.

Langkah 3: Bagi dengan $\frac{dx}{dt}$ Semula

Bagi hasil Langkah 2 dengan laju horizontal $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ dari awal. **Jangan sampai lupa tahap pembagian ini!**

Makna Geometris: Kecekungan Kurva (Concavity)

Uji Turunan Kedua untuk Kelengkungan

- **Cekung ke Atas (Concave Up / ∪):**

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

  Gradien garis singgung m terus bertambah. Kurva berada di **atas** seluruh garis singgungnya.

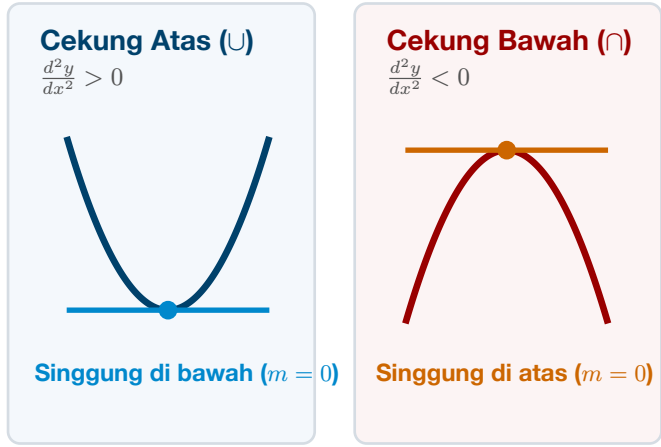
- **Cekung ke Bawah (Concave Down / ∩):**

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

  Gradien garis singgung m terus berkurang. Kurva berada di **bawah** seluruh garis singgungnya.

- **Titik Belok (Inflection Point):** Terjadi saat $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ dan tanda kecekungan kurva berganti.

Visualisasi Orientasi Kecekungan



Garis singgung berada di bawah (cekung atas) / di atas (cekung bawah).

Contoh Terpandu: Menghitung Turunan Kedua Parameter

Soal

Diberikan kurva parametrik: $x(t) = t - t^2, \quad y(t) = t - t^3$.

Tentukan rumus turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$ dalam parameter t.

Langkah 1 & 2: Turunan Pertama & Penurunan Ulang

- Turunan komponen: $x'(t) = 1 - 2t, \quad y'(t) = 1 - 3t^2$
- Turunan pertama:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

- Turunkan terhadap t menggunakan Aturan Pembagian ($\frac{u'v - uv'}{v^2}$):

$$u = 1 - 3t^2 \Rightarrow u' = -6t, \quad v = 1 - 2t \Rightarrow v' = -2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \texttt{frac}\{(-6t)(1-2t) - (1-3t^2)(-2), (1-2t)^2\} = \texttt{frac}\{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2, (1-2t)^2\} = \texttt{frac}\{6t^2 - 6t + 2, (1-2t)^2\}$$

Contoh Terpandu: Lanjutan & Evaluasi Kecekungan

Langkah 3: Pembagian dengan Laju Awal $x'(t)$

Bagi hasil Langkah 2 dengan $\frac{dx}{dt} = 1 - 2t$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} = \texttt{frac}\{\texttt{frac}\{6t^2 - 6t + 2, (1-2t)^2\}, 1 - 2t\} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

Evaluasi Kecekungan saat $t = 2$

Substitusikan $t = 2$:

- Pembilang: $6(2)^2 - 6(2) + 2 = 24 - 12 + 2 = 14$
- Penyebut: $(1 - 2(2))^3 = (1-4)^3 = (-3)^3 = -27$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=2} = \frac{14}{-27} = -\frac{14}{27} < 0$$

Kesimpulan: Kurva pada saat $t = 2$ bersifat **cekung ke bawah (concave down)**.

Turunan Kedua Kurva Lingkaran & Kurvatur Konstan

Analisis Turunan Kedua Lingkaran $x = R\cos t, y = R\sin t$

1. Dari turunan pertama: $\frac{dy}{dx} = -\cot(t)$
2. Turunkan terhadap t:

$$\frac{d}{dt}[-\cot(t)] = -(-\csc^2(t)) = \csc^2(t) = \frac{1}{\sin^2 t}$$

3. Bagi dengan $x'(t) = -R\sin(t)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-R\sin t} = -\frac{1}{R\sin^3 t} = -\frac{R^2}{y^3}$$

Wawasan Geometris: Pada setengah lingkaran atas ($y > 0$), nilai $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R^2}{y^3} < 0$, yang membuktikan secara kalkulus bahwa kubah lingkaran selalu **cekung ke bawah** menuju titik pusatnya!

Bagian 3 — Turunan Tingkat Tinggi (Higher-Order Derivatives)

Laju Perubahan Berulang, Kinematika Lanjut, dan Pola Turunan ke-n

Konsep dan Notasi Turunan Tingkat Tinggi

Jika turunan pertama $f'(x)$ diturunkan lagi, kita mendapatkan turunan tingkat tinggi secara berulang.

Tingkat	Lagrange (Prima)	Leibniz	Operator (Euler)	Makna Intuitif
Pertama	y' atau $f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$D_x y$	Gradien garis singgung, laju sesaat
Kedua	y'' atau $f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$D_x^2 y$	Kelengkungan (**curvature**), percepatan
Ketiga	y''' atau $f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$D_x^3 y$	Laju perubahan percepatan (**jerk**)
Ke-4	$y^{(4)}$ atau $f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$D_x^4 y$	Tingkat sentakan lanjut (**snap**)
Ke-n	$y^{(n)}$ atau $f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$D_x^n y$	Diferensiasi diulang sebanyak n kali

Standar Penulisan: Mulai orde 4 ke atas, tanda petik dihindari dan diganti indeks dalam kurung $f^{(n)}(x)$ agar tidak ambigu dengan pemangkatan aljabar $f^{n(x)}$.

Interpretasi Fisik: Dari Posisi ke Sentakan (*Jerk*)

1. Posisi: $s(t)$

Lokasi koordinat objek terhadap titik acuan pada waktu t. Satuan SI: meter (m).

2. Kecepatan: $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$

Laju perpindahan posisi terhadap waktu. Menentukan cepat dan arah pergerakan. Satuan SI: $\mathrm{m/s}$.

3. Percepatan: $a(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$

Laju perubahan kecepatan. Menurut Hukum Newton ($F = ma$), percepatan berkorelasi langsung dengan **gaya luar**. Satuan SI: $\mathrm{m/s^2}$.

4. Sentakan (Jerk): $j(t) = s'''(t) = \frac{d^3s}{dt^3}$

Laju perubahan percepatan sesaat. Satuan SI: $\mathrm{m/s^3}$. Kunci kenyamanan penumpang lift/kereta dan kehalusan sendi aktuator robot.

Pola Turunan ke-n: Polinomial & Eksponensial

Kasus A: Polinomial Pangkat m

Diberikan $f(x) = x^m$:

- $f'(x) = mx^{m-1}$
- $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$
- $f^{(m)}(x) = m(m-1)...1 = m!$
- $f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{untuk semua} \quad n > m$

Karakteristik: Polinomial derajat m **pasti lenyap menjadi nol** setelah diturunkan $m+1$ kali.

Kasus B: Fungsi Eksponensial

Diberikan $f(x) = e^{kx}$:

- $f'(x) = ke^{kx}$
- $f''(x) = k^2e^{kx}$
- $f'''(x) = k^3e^{kx}$

$$f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$$

Setiap kali diturunkan, faktor pengali konstan k keluar mengalikan fungsi asli.

Pola Turunan ke-n: Trigonometri & Fungsi Pecahan

Kasus C: Trigonometri $\sin(x)$ & $\cos(x)$

$f(x) = \sin(x)$

- $f'(x) = \cos(x)$ (orde 1)
- $f''(x) = -\sin(x)$ (orde 2)
- $f'''(x) = -\cos(x)$ (orde 3)
- $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ (kembali ke fungsi asal!)

Siklus Berulang Modulo 4:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Kasus D: Fungsi Pecahan / Resiprokal

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

- $f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$
- $f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

Pola Faktorial Selang-Seling:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Aturan Leibniz untuk Turunan Hasil Kali ke-n

Bagaimana mencari turunan ke-n dari perkalian dua fungsi, $y = u(x) \cdot v(x)$?

Teorema Aturan Leibniz (General Leibniz Rule)

Rumus ini memiliki struktur yang **persis sama** dengan Teorema Ekspansi Binomial Newton $(a+b)^n$:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$$

di mana $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ adalah koefisien kombinasi binomial (Segitiga Pascal).

- **Turunan Kedua ($n = 2$):** $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$
- **Turunan Ketiga ($n = 3$):** $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

Contoh Aplikasi Aturan Leibniz: Pemilihan Suku

Soal

Tentukan turunan ke-4 dari fungsi:

$$f(x) = x^2 e^{3x}$$

Strategi Pemilihan Suku u dan v

Pilihlah suku polinomial sebagai $v(x)$ karena turunannya akan **segera lenyap menjadi nol**:

- $v(x) = x^2 \Rightarrow v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = 0, \quad v^{(4)} = 0$
- $u(x) = e^{3x} \Rightarrow u^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$

Ekspansi Leibniz untuk $n = 4$:

$$(uv)^{(4)} = \binom{4}{0} u^{(4)} v + \binom{4}{1} u^{(3)} v' + \binom{4}{2} u^{(2)} v'' + \cancel{\binom{4}{3} u' v'''} + \cancel{\binom{4}{4} u v^{(4)}}$$

Perhatikan: Dua suku terakhir otomatis gugur karena turunan v sudah bernilai nol!

Contoh Aplikasi Aturan Leibniz: Evaluasi & Hasil Akhir

Substitusi dan Penyederhanaan Aljabar

Hitung masing-masing suku yang tersisa:

- Suku 1: $1 \cdot \left(3^4 e^{3x}\right) \cdot \left(x^2\right) = 81x^2 e^{3x}$
- Suku 2: $4 \cdot \left(3^3 e^{3x}\right) \cdot (2x) = 4 \cdot 27 \cdot 2x e^{3x} = 216x e^{3x}$
- Suku 3: $6 \cdot \left(3^2 e^{3x}\right) \cdot (2) = 6 \cdot 9 \cdot 2e^{3x} = 108e^{3x}$

Jumlahkan dan faktorkan suku eksponensial bersama e^{3x}:

$$f^{(4)}(x) = \left(81x^2 + 216x + 108\right)e^{3x}$$

> Tanpa Aturan Leibniz, kita harus melakukan aturan perkalian biasa sebanyak 4 kali berturut-turut yang rawan kesalahan aljabar!

Bagian 4 — Relevansi Komputasi, Grafika & Sains Data

Dari Kurva Bézier Grafis hingga Optimasi Orde Kedua Machine Learning

Grafika Komputer: Kurva Bézier Kuadratik & Kubik

Formulasi Kurva Bézier Berparameter

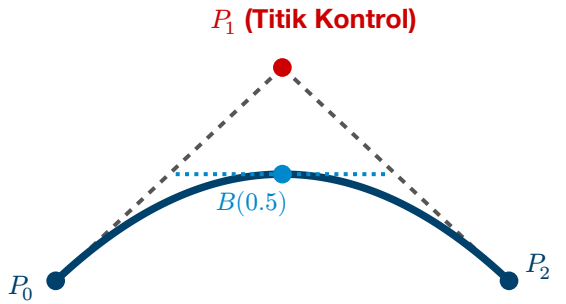
Format vektor (SVG, font TrueType, animasi CSS) dibangun dari fungsi parameter $t \in [0, 1]$:

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

Peran Turunan:

- **Turunan Pertama $B'(t)$:** Menentukan **vektor arah dan kecepatan kuas** grafis pada setiap titik.
- **Turunan Kedua $B''(t)$:** Mengontrol **kelengkungan (curvature)** untuk memastikan sambungan garis halus.

Titik Kontrol Kurva Bézier Kuadratik



$B'(0)$ sejajar ruas P_0P_1, kelengkungan ditarik oleh P_1

Garis biru putus-putus: garis singgung di titik tengah $B(0.5)$.

Kontinuitas Geometri (C^0, C^1, C^2) pada CAD & Animasi

Dalam perancangan grafis 3D, bodi otomotif, dan animasi pergerakan kamera game, sambungan antar-segmen kurva dievaluasi berdasarkan turunan tingkat tingginya:

Kontinuitas C^0 (Titik Sambung)

- Kurva hanya saling menyentuh di titik ujung.
- Turunan pertama tidak sama di sambungan.
- Memiliki **sudut tajam (patahan visual)**.

Kontinuitas C^1 (Garis Singgung)

- Posisi sama **dan** turunan pertama sama:

$$B_{1'}(1) = B_{2'}(0)$$

- Arah garis singgung menyatu mulus tanpa sudut lancip.

Kontinuitas C^2 (Kurvatur Mulus)

- Turunan pertama **dan** turunan kedua sama:

$$B_{1''}(1) = B_{2''}(0)$$

- Kelengkungan transisi kontinu; pantulan cahaya pada permukaan mobil mulus sempurna.

Machine Learning: Optimasi Orde Kedua & Metode Newton

Gradient Descent vs Metode Newton

- **Gradient Descent (Orde 1):**

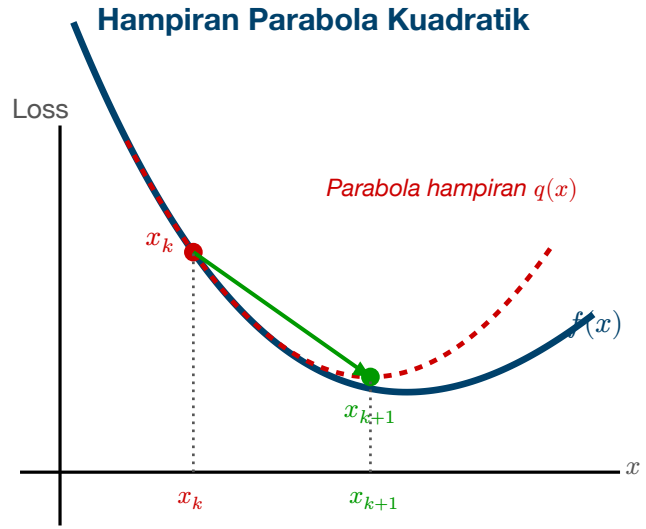
$$x_{k+1} = x_k - \eta \cdot f'(x_k)$$

  Hanya melihat lereng lokal; lambat dan zig-zag jika lembah sempit.

- **Metode Newton (Orde 2):**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

  Memanfaatkan kurvatur $f''(x_k)$ untuk memodelkan hampiran parabola kuadratik, langsung melompat mendekati titik minimum.



Metode Newton melompat langsung ke minimum parabola hampiran.

Aproksimasi Fungsi Komputasi: Fondasi Deret Taylor

Bagaimana CPU, GPU, atau kalkulator menghitung nilai $\sin(0.35)$ atau $e^{1.2}$ secara numerik? Komputer hanya dapat mengeksekusi operasi aritmatika dasar ($+$, $-$, $\times$, $\div$)!

Teorema Deret Taylor & Maclaurin

Sembarang fungsi mulus di sekitar titik $x = a$ dapat dihampiri secara presisi oleh polinomial berbobot **turunan tingkat tinggi**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Turunan tingkat 0 memberikan titik koordinat awal.
- Turunan pertama memberikan kemiringan garis aproksimasi linear.
- Turunan kedua mengoreksi kelengkungan parabola lokal.
- Turunan orde lebih tinggi terus menyempurnakan ketelitian hingga toleransi **machine epsilon**.

Bagian 5 — Penutup & Rangkuman

Ringkasan Materi dan Peta Jalan Kuliah Berikutnya

Rangkuman Formula Kunci Pertemuan 06

Konsep	Rumus Matematis	Catatan Kritis
Turunan Pertama Parameter	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$	Syarat mutlak: $\frac{dx}{dt} \neq 0$
Turunan Kedua Parameter	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}}$	Bukan $\frac{y''}{x''}$! Turunkan hasil y' ke t, lalu bagi x'.
Kecekungan Kurva	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow \cup$ (Cekung atas) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow \cap$ (Cekung bawah)	Menentukan kurvatur dan tipe titik ekstrim.
Aturan Leibniz Hasil Kali	$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$	Identik dengan Binomial Segitiga Pascal.

Peta Jalan (*Roadmap*) Perkuliahan Berikutnya

Pertemuan 6 **Turunan Parameter & Tingkat Tinggi (Hari Ini):**

Kita berhasil memperluas kalkulus ke kurva berparameter dinamis, menguasai cara mencari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ secara tepat tanpa terjebak miskonsepsi, dan memahami peran krusial turunan berulang dalam kinematika, grafika Bézier, serta optimasi numerik.

Pertemuan 7 **Aplikasi Turunan: Optimasi & Laju Berkaitan (Minggu Depan):**

Setelah seluruh fondasi teknik diferensiasi lengkap (dasar, implisit, parameter, orde tinggi), kita akan menerapkan kalkulus secara penuh untuk menyelesaikan persoalan dunia nyata: maksimasi profit, minimasi biaya, laju yang saling berkaitan (*related rates*), dan persiapan menuju Ujian Tengah Semester (UTS).