Latihan Soal Pertemuan 6

Diferensiasi Fungsi Parameter, Turunan Kedua Parameter, dan Turunan Tingkat Tinggi

Kalkulus · Pertemuan 06

Soal 1: Turunan Pertama Parameter Dasar (Polinomial)

Diberikan kurva parametrik berikut:

$$x(t) = t^2 + 3t, \quad y(t) = 2t^3 - 4t$$

Tentukan rumus turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dalam variabel parameter t.

Pembahasan 1

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunkan komponen x dan y terhadap parameter t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 - 4$$

2. Terapkan rumus turunan fungsi parameter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2 - 4}{2t + 3} \quad \left(t \neq -\frac{3}{2}\right)$$

Soal 2: Evaluasi Gradien Garis Singgung di Titik Parameter

Diberikan kurva parametrik:

$$x(t) = 3t^2 - 1, \quad y(t) = t^3 + 2t$$

Hitunglah gradien garis singgung kurva tersebut pada saat $t = 2$.

Pembahasan 2

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunkan masing-masing fungsi terhadap t:

$$x'(t) = 6t \quad \text{dan} \quad y'(t) = 3t^2 + 2$$

2. Bentuk rumus turunan pertama:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2+2}{6t}$$

3. Evaluasi nilai turunan pada saat $t = 2$:

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2} = \frac{3(2)^2+2}{6(2)} = \frac{3(4)+2}{12} = \frac{14}{12}$$

$$m = \frac{7}{6}$$

Soal 3: Persamaan Garis Singgung Kurva Parametrik

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva parametrik:

$$x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = t^3 - t$$

di titik saat parameter $t = 2$.

Pembahasan 3

Solusi Langkah demi Langkah

1. Tentukan titik singgung (x_0, y_0) saat $t = 2$:

$x_0 = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ $y_0 = (2)^3 - 2 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow \text{Titik Singgung} = (3, 6)$

2. Cari gradien garis singgung $m = \frac{dy}{dx}$:

$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 3t^2 - 1$ $m = \frac{3(2)^2 - 1}{2(2)} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}$

3. Gunakan rumus persamaan garis titik-kemiringan $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y - 6 = \frac{11}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y - 24 = 11x - 33$

$$11x - 4y - 9 = 0 \quad \text{atau} \quad y = \frac{11}{4}x - \frac{9}{4}$$

Soal 4: Garis Normal Kurva Parametrik

Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung di titik yang sama ($m_n = -\frac{1}{m}$).

Tentukan gradien garis normal pada kurva $x(t) = 2\cos(t), y(t) = 3\sin(t)$ saat $t = \frac{\pi}{6}$.

Pembahasan 4

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunkan masing-masing komponen:

$x'(t) = -2\sin(t), \quad y'(t) = 3\cos(t)$

2. Cari gradien garis singgung m:

$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos(t)}{-2\sin(t)} = -\frac{3}{2}\cot(t)$

3. Evaluasi gradien garis singgung pada $t = \frac{\pi}{6}$:

$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

4. Hitung gradien garis normal $m_n = -\frac{1}{m}$:

$m_n = -\frac{1}{-\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$$m_n = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Soal 5: Garis Singgung Horizontal dan Vertikal

Sebuah partikel bergerak di bidang kartesius dengan lintasan:

$$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t$$

Tentukan nilai t saat garis singgung lintasan bersifat mendatar (horizontal) dan saat tegak (vertikal).

Pembahasan 5

Solusi Langkah demi Langkah

Turunan komponen: $x'(t) = 2t - 4 = 2(t-2)$ $y'(t) = 6t^2 - 6 = 6(t^2-1) = 6(t-1)(t+1)$

- **Garis Singgung Horizontal ($y'(t) = 0$ dan $x'(t) \neq 0$):** $6(t-1)(t+1) = 0 \Rightarrow t = 1 \quad \text{atau} \quad t = -1$. (Pada kedua nilai ini, $x'(t) \neq 0$, maka syarat terpenuhi).

Garis singgung mendatar pada $t = 1$ dan $t = -1$

- **Garis Singgung Vertikal ($x'(t) = 0$ dan $y'(t) \neq 0$):** $2(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$. (Pada $t = 2$, $y'(2) = 6(3) = 18 \neq 0$).

Garis singgung tegak pada $t = 2$

Soal 6: Turunan Kedua Parameter ($d^2\frac{y}{d}x^2$)

Tentukan turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari persamaan kurva parameter:

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3 - 3t$$

Ingat: Jangan langsung membagi $y''(t)$ dengan $x''(t)$!

Pembahasan 6

Solusi Langkah demi Langkah (Prosedur 3 Langkah)

1. Turunan pertama masing-masing: $x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 3t^2 - 3.$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{2t} = \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}t^{-1}$$

2. Turunkan hasil y' tersebut terhadap parameter t:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(-1t^{-2}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2t^2} = \frac{3t^2+3}{2t^2}$$

3. Bagi hasil langkah 2 dengan $x'(t) = 2t$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{3t^2+3}{2t^2}}{2t} = \frac{3t^2+3}{4t^3}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}}$$

Soal 7: Menentukan Kecekungan Kurva Parameter

Dari kurva pada Soal 6 ($x = t^2, y = t^3 - 3t$ dengan $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$):

Tentukan kapan kurva tersebut bersifat **cekung ke atas** dan kapan **cekung ke bawah**.

Pembahasan 7

Solusi Langkah demi Langkah

Analisis tanda dari turunan kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$$

- Perhatikan bahwa pembilang $3(t^2+1) > 0$ **selalu positif** untuk setiap nilai riil t.
- Maka tanda dari $\frac{d^2y}{dx^2}$ sepenuhnya ditentukan oleh tanda penyebut $4t^3$:

1. **Cekung ke Atas (Concave Up):** $\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Leftrightarrow 4t^3 > 0 \Leftrightarrow t > 0$.
2. **Cekung ke Bawah (Concave Down):** $\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Leftrightarrow 4t^3 < 0 \Leftrightarrow t < 0$.

Kurva cekung ke atas untuk $t \in (0, \infty)$, dan cekung ke bawah untuk $t \in (-\infty, 0)$.

Soal 8: Turunan Kedua Kurva Lingkaran

Diberikan lingkaran parametrik radius R:

$$x(t) = R\cos(t), \quad y(t) = R\sin(t)$$

Buktikan bahwa $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{R\sin^3(t)} = -\frac{R^2}{y^3}$.

Pembahasan 8

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunan pertama:

$x'(t) = -R\sin(t), \quad y'(t) = R\cos(t)\ \frac{dy}{dx} = \frac{R\cos(t)}{-R\sin(t)} = -\cot(t)$

2. Turunkan terhadap t:

$\frac{d}{dt}[-\cot(t)] = -(-\csc^2(t)) = \csc^2(t) = \frac{1}{\sin^2(t)}$

3. Bagi dengan $x'(t) = -R\sin(t)$:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{\sin^2(t)}}{-R\sin(t)} = -\frac{1}{R\sin^3(t)}$

4. Nyatakan kembali dalam koordinat $y = R\sin(t) \Rightarrow \sin(t) = \frac{y}{R}$:

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{R\left(\frac{y}{R}\right)^3} = -\frac{1}{R\left(\frac{y^3}{R^3}\right)} = -\frac{R^2}{y^3}$

Terbukti. (Sesuai dengan turunan implisit $x^2 + y^2 = R^2$!)

Soal 9: Kurva Astroid (Hiposikloid)

Kurva Astroid didefinisikan oleh:

$$x(t) = a\cos^3(t), \quad y(t) = a\sin^3(t)$$

Tentukan rumus turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan evaluasi nilainya pada $t = \frac{\pi}{3}$.

Pembahasan 9

Solusi Langkah demi Langkah

1. Terapkan aturan rantai pada turunan komponen:

$$x'(t) = 3a\cos^2(t)\cdot(-\sin(t)) = -3a\cos^2(t)\sin(t)\ y'(t) = 3a\sin^2(t)\cdot(\cos(t)) = 3a\sin^2(t)\cos(t)$$

2. Hitung perbandingan $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2(t)\cos(t)}{-3a\cos^2(t)\sin(t)} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$$

3. Evaluasi pada saat $t = \frac{\pi}{3}$:

$$m = -\tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan(t) \quad \text{dan} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$$

Soal 10: Kurva Sikloid (Cycloid)

Diberikan kurva sikloid yang dibentuk oleh roda radius a:

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t)$$

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan tunjukkan bahwa gradiennya sama dengan $\cot(\frac{t}{2})$.

Pembahasan 10

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunan komponen terhadap t:

$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a(\sin t)$

2. Hitung $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

3. Gunakan identitas trigonometri sudut ganda (setengah sudut):

$\sin t = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)\ 1 - \cos t = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

4. Sederhanakan bentuk pecahan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cot\left(\frac{t}{2}\right)$$

Terbukti: $\frac{dy}{dx} = \cot\left(\frac{t}{2}\right)$

Soal 11: Turunan Kedua dan Ketiga Polinomial

Diberikan fungsi polinomial berikut:

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 7x + 10$$

Tentukan $f''(x)$ dan $f'''(x)$.

Pembahasan 11

Solusi Langkah demi Langkah

Turunkan fungsi secara bertahap:

- **Turunan Pertama:** $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 6x - 7$
- **Turunan Kedua:** $f''(x) = 40x^3 - 60x^2 + 6$
- **Turunan Ketiga:** $f'''(x) = 120x^2 - 120x$

$$f''(x) = 40x^3 - 60x^2 + 6 \quad \text{dan} \quad f'''(x) = 120x(x-1)$$

Soal 12: Kapan Polinomial Berderajat n Turunannya Menjadi Nol?

Jika $f(x) = 4x^6 - 2x^3 + 8$:

1. Berapakah nilai turunan ke-6, yaitu $f^{(6)}(x)$?
2. Berapakah nilai turunan ke-7, yaitu $f^{(7)}(x)$?

Pembahasan 12

Solusi Langkah demi Langkah

Berdasarkan Teorema Turunan Polinomial Derajat n:

- Turunan ke-n dari suku tertinggi cx^n adalah konstan $c \cdot n!$. Suku dengan derajat lebih rendah $< n$ akan lenyap menjadi 0.

1. Untuk $f^{(6)}(x)$:

$$f^{(6)}(x) = 4 \cdot 6! = 4 \cdot 720 = 2880$$

2. Untuk $f^{(7)}(x)$:

Karena derajat polinomial awal adalah 6, maka semua turunan yang tingkatnya > 6 pasti nol:

$$f^{(6)}(x) = 2880 \quad \text{dan} \quad f^{(7)}(x) = 0$$

Soal 13: Kinematika Robotika — Kecepatan, Percepatan, Jerk

Sebuah aktuator lengan robot bergerak dengan posisi sumbu $s(t)$ (dalam meter) pada waktu t detik:

$$s(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2$$

Tentukan percepatan $a(t)$ dan sentakan (*jerk*) $j(t)$ pada saat $t = 2$ detik.

Pembahasan 13

Solusi Langkah demi Langkah

1. Kecepatan $v(t) = s'(t)$:

$v(t) = 4t^3 - 12t^2 + 12t$

2. Percepatan $a(t) = s''(t) = v'(t)$:

$a(t) = 12t^2 - 24t + 12 = 12(t-1)^2$ Evaluasi pada $t = 2$: $a(2) = 12(2)^2 - 24(2) + 12 = 48 - 48 + 12 = 12\ \text{m/s}^2$

3. Sentakan (*Jerk*) $j(t) = s'''(t) = a'(t)$:

$j(t) = 24t - 24 = 24(t-1)$ Evaluasi pada $t = 2$: $j(2) = 24(2) - 24 = 24\ \text{m/s}^3$

Percepatan $a(2) = 12\ \text{m/s}^2$, Sentakan $j(2) = 24\ \text{m/s}^3$

Soal 14: Pola Turunan ke-n Fungsi Eksponensial

Tentukan rumus umum turunan ke-n, yaitu $f^{(n)}(x)$, untuk fungsi:

$$f(x) = e^{-2x}$$

dan hitung nilai spesifik dari $f^{(5)}(0)$.

Pembahasan 14

Solusi Langkah demi Langkah

1. Hitung turunan pertama beberapa kali untuk melihat keteraturan:

- $f'(x) = -2e^{-2x}$
- $f''(x) = (-2)^2 e^{-2x} = 4e^{-2x}$
- $f'''(x) = (-2)^3 e^{-2x} = -8e^{-2x}$

2. Rumus umum turunan ke-n:

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$$

3. Evaluasi turunan ke-5 pada $x = 0$:

$f^{(5)}(0) = (-2)^5 e^0 = -32 \cdot 1 = -32$

$$f^{(5)}(0) = -32$$

Soal 15: Pola Turunan ke-n Fungsi Rasional / Resiprokal

Diberikan fungsi pecahan:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1}$$

Tentukan formula umum untuk turunan ke-n, yaitu $f^{(n)}(x)$.

Pembahasan 15

Solusi Langkah demi Langkah

1. Turunkan bertahap:

- $f'(x) = -1(x+2)^{-2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$
- $f''(x) = (-1)(-2)(x+2)^{-3} = \frac{2!}{(x+2)^3}$
- $f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} = \frac{-3!}{(x+2)^4}$
- $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(x+2)^{-5} = \frac{4!}{(x+2)^5}$

2. Perhatikan pola tanda selang-seling $(-1)^n$, nilai faktorial $n!$, dan pangkat penyebut $n+1$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

Soal 16: Pola Turunan ke-n Trigonometri Modulo 4

Tentukan turunan ke-101 dari fungsi trigonometri:

$$f(x) = \cos(x)$$

Pembahasan 16

Solusi Langkah demi Langkah

1. Catat siklus turunan $\cos(x)$ dengan periode 4:

- $f'(x) = -\sin(x)$ (sisa 1)
- $f''(x) = -\cos(x)$ (sisa 2)
- $f'''(x) = \sin(x)$ (sisa 3)
- $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ (sisa 0 / habis dibagi 4)

2. Hitung modulo 4 dari tingkat turunan $n = 101$:

$$101 = 4 \cdot 25 + 1 \Rightarrow 101 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$$

3. Karena bersisa 1, turunan ke-101 identik dengan turunan ke-1:

$$f^{(101)}(x) = -\sin(x)$$

Soal 17: Aturan Leibniz untuk Turunan Kedua

Gunakan formula Aturan Leibniz $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$ untuk mencari turunan kedua dari:

$$y = x^2 \sin(x)$$

Pembahasan 17

Solusi Langkah demi Langkah

Definisikan komponen:

- $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x, \quad u'' = 2$
- $v = \sin(x) \Rightarrow v' = \cos(x), \quad v'' = -\sin(x)$

Terapkan Aturan Leibniz $n = 2$:

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

Substitusikan masing-masing suku: $y'' = (2)(\sin x) + 2(2x)(\cos x) + (x^2)(-\sin x)$ $y'' = 2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x)$

Kelompokkan suku $\sin(x)$:

$$y'' = (2 - x^2)\sin(x) + 4x\cos(x)$$

Soal 18: Aturan Leibniz untuk Turunan Ketiga

Tentukan turunan ketiga y''' dari fungsi:

$$y = xe^{2x}$$

Pembahasan 18

Solusi Langkah demi Langkah

Pilih $v = x$ (karena turunannya cepat nol) dan $u = e^{2x}$:

- $v = x \Rightarrow v' = 1, \quad v'' = 0, \quad v''' = 0$
- $u = e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}, \quad u'' = 4e^{2x}, \quad u''' = 8e^{2x}$

Aturan Leibniz $n = 3$:

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + \cancel{3u'v''} + \cancel{uv'''}$$

Substitusi suku yang tersisa: $(uv)''' = (8e^{2x})(x) + 3(4e^{2x})(1)$ $(uv)''' = 8xe^{2x} + 12e^{2x}$

$$y''' = (8x + 12)e^{2x} = 4(2x + 3)e^{2x}$$

Soal 19: Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Lokal

Tentukan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ dan uji menggunakan turunan kedua $f''(x)$ untuk menentukan apakah titik tersebut merupakan **maksimum lokal** atau **minimum lokal**.

Pembahasan 19

Solusi Langkah demi Langkah

1. Cari titik stasioner ($f'(x) = 0$):

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) = 0$ Titik stasioner berada pada $x = 1$ dan $x = 3$.

2. Cari turunan kedua:

$f''(x) = 6x - 12$

3. Uji masing-masing titik:

- Di $x = 1$: $f''(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0$ (Cekung ke bawah). $\Rightarrow$ $x = 1$ adalah **Maksimum Lokal** dengan nilai $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$.
- Di $x = 3$: $f''(3) = 6(3) - 12 = +6 > 0$ (Cekung ke atas). $\Rightarrow$ $x = 3$ adalah **Minimum Lokal** dengan nilai $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$.

Maksimum lokal di $(1, 6)$, Minimum lokal di $(3, 2)$

Soal 20: Optimasi Orde Dua (Satu Langkah Metode Newton)

Dalam Machine Learning, untuk meminimumkan fungsi rugi (*loss*) $f(x)$, Metode Newton memperbarui estimasi parameter dengan rumus:

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

Jika fungsi rugi adalah $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x$, hitung nilai iterasi pertama x_1 jika dimulai dari titik tebakan awal $x_0 = 1$.

Pembahasan 20

Solusi Langkah demi Langkah

1. Hitung turunan pertama dan kedua:

$f'(x) = 4x^3 + 4x + 4$ $f''(x) = 12x^2 + 4$

2. Evaluasi pada titik tebakan $x_0 = 1$:

$f'(1) = 4(1)^3 + 4(1) + 4 = 12$ $f''(1) = 12(1)^2 + 4 = 16$

3. Terapkan rumus pembaruan Newton-Raphson:

$x_1 = 1 - \frac{12}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$x_1 = 0.25$$

Hanya dalam 1 langkah, metode orde kedua langsung melompat mendekati titik minimum fungsi!